Aufgabe 1 (Selbststudium)

Für die Berechnung des Maximum-Likelihood Schätzers werden elementare Rechenregeln (insbesondere die ln-Rechenregeln) benötigt und Ableitungen müssen berechnet werden. Rekapitulieren Sie diese Inhalte und ...

a) ... formen Sie die folgenden Terme um:
   (i) $\ln(x^a \cdot y) + \sqrt[7]{a^5}$
   (ii) $\ln\left((\frac{a}{b})^n\right)$
   (iii) $\ln(e^{2m+4n})$
   (iv) $\ln\left(\prod_{i=1}^n (x_i - a)^2\right)$
   (v) $\prod_{i=1}^n (b + 2q)$

b) ... leiten Sie die folgenden Terme nach λ ab:
   (i) $\ln(2\lambda - 1)$
   (ii) $(5\lambda - a)^4$
   (iii) $5b\lambda \cdot \ln(\lambda^2)$

c) Begründen Sie kurz, warum man für die Bestimmung des Optimums der Likelihood auch auch die log-Likelihood maximieren kann. Warum ist dieses Vorgehen sinnvoll?

Aufgabe 2

Wir betrachten n unabhängige Zufallsziehungen aus einer Normalverteilung ($n > 7$). Das i-te Experiment wird durch die Zufallsvariable $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ beschrieben.

Wir betrachten drei mögliche Schätzer für den unbekannten Erwartungswert μ:

$$T_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \quad T_b = \frac{1}{3}\,(X_3 + X_5 + X_7) \quad \text{und } T_c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\frac{1}{3}X_i + 3)$$

a) Prüfen Sie die Erwartungstreue der Schätzer.

b) Welchen Schätzer würden Sie bevorzugen? (Begründung!)

Aufgabe 3

Die Zeit, die eine Mannschaft ohne Gegentor bleibt (in Minuten ab Beginn der Fußball-Europameisterschaft), wird als zufällig angenommen. Als Modell für die Wartezeit bis zum ersten Gegentor betrachtet man die Zufallsvariable X_i, von der angenommen wird, dass sie *exponentialverteilt* ist mit Parameter $\lambda > 0$ und $x_i \geq 0$. Die Dichte ist also $f(x_i) = \lambda \exp(-\lambda x_i)$.
Man betrachte nun n Mannschaften, wobei die Wartezeit bis zum ersten Gegentor pro Mannschaft durch die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ beschrieben wird.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}$ für die n Beobachtungen.

b) In der Fußball-Europameisterschaft 2012 ergeben sich für die teilnehmenden 16 Mannschaften die folgenden Zeiten ohne Gegentor:

Mannschaft	Zeit	Mannschaft	Zeit
Polen	50	Spanien	59
Griechenland	16	Italien	63
Russland	51	Irland	2
Tschechien	14	Kroatien	18
Niederlande	23	Frankreich	29
Dänemark	113	England	38
Deutschland	162	Ukraine	51
Portugal	71	Schweden	54

Berechnen Sie für diese Daten den Maxiumum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$.

c) Halten Sie die Exponentialverteilung für ein realistisches Modell für die Wartezeit bis zum ersten Gegentor?

Aufgabe 4

Aus der Vorlesung ist Ihnen bekannt, dass eine normalverteilte Zufallsvariable X die folgende Dichte besitzt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$$

Es seien insgesamt n unabhängig und identisch verteilte (iid) Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ mit konkreten Realisationen $x_1, ..., x_n$ gegeben.
Leiten Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für die unbekannten Parameter μ und σ^2 her, indem Sie

a) μ unbekannt, σ^2 bekannt

b) μ bekannt, σ^2 unbekannt

voraussetzen.