Lösungsnotizen Aufgabe 3

Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $P(\pi - c \leq \bar{Y}_n \leq \pi + c)$ – wieder in zwei Schritten:

1. Zufallsgröße $\bar{Y}_n$ standardisieren mit zugehörigem Erwartungswert $\mathrm{E}\,(\bar{Y}_n) = \pi$ und Standardabweichung (Wurzel der Varianz) $\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{Y}_n)} = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$:

$$\begin{aligned}
\text{Zufallsgröße} \quad & Z = \frac{\bar{Y}_n - \mathrm{E}\,(\bar{Y}_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{Y}_n)}} = \frac{\bar{Y}_n - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \sim \mathrm{N}(0,1) \\
\text{untere Grenzen:} \quad & \frac{\pi - c - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} = -\frac{c}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \\
\text{obere Grenzen:} \quad & \frac{\pi + c - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} = \frac{c}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}
\end{aligned}$$

2. Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$$\begin{aligned}
P(-\frac{c}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \leq Z \leq \frac{c}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}) &= P(Z \leq \frac{c}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}) - P(Z \leq -\frac{c}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}) \\
&= \Phi(\frac{c}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}) - \big(1 - \Phi(\frac{c}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}})\big) \\
&= 2 \cdot \Phi(\frac{c}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}) - 1
\end{aligned}$$