Lösungsnotizen Aufgabe 1

Formalisierung:

$\tilde{\Omega}$: (Gesamtheit der) Wähler (Grundgesamtheit)
$\tilde{\omega}$: (einzelner) Wähler
ω_i: Wähler, der als i-te Person in die Stichprobe gelangte, $i = 1, \ldots 10$.

Merkmal $\tilde{X} : \tilde{\Omega} \longrightarrow \{\text{SPD,CDU/CSU,}\ldots\}$ individuelle Wahlentscheidung

Ereignisse A_{ij}, z.B. $A_{2,5} \hat{=}$ „Die zweite gezogene Person wählte PDS"

Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit:
„Mindestens 9 mal PDS" entspricht den Ereignissen: „10 mal PDS"oder „9 mal PDS":

$$\begin{array}{rcl}
\text{„10 mal PDS"} & \hat{=} & (PDS \cap PDS \cap PDS \ldots \cap PDS) \\
 & = & (A_{1,5} \cap A_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \ldots \cap A_{10,5}) \\
\text{oder} & \cup & \\
\text{„9 mal PDS"} & = & (\bar{A}_{1,5} \cap A_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \ldots \cap A_{10,5}) \\
 & \cup & (A_{1,5} \cap \bar{A}_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \ldots \cap A_{10,5}) \\
 & \cup & \ldots \\
 & \cup & (A_{1,5} \cap A_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \ldots \cap \bar{A}_{10,5})
\end{array}$$

Alle Ereignisse für „Mindestens 9 mal PDS" sind jeweils paarweise disjunkt, ihre Wahrscheinlichkeiten können also addiert werden.

$$\begin{array}{rcl}
P(\text{„9 mal PDS"}) & = & P(\bar{A}_{1,5} \cap A_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \ldots \cap A_{10,5}) \\
 & & +P(A_{1,5} \cap \bar{A}_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \ldots \cap A_{10,5}) \\
 & & \vdots \\
 & & +P(A_{1,5} \cap A_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \ldots \cap \bar{A}_{10,5})
\end{array}$$

Mit Hilfe der Unabhängigkeit lassen sich die benötigten Wahrscheinlichkeiten bestimmen:

- „10 mal PDS"

$$\begin{array}{rcl}
P(A_{1,5} \cap A_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \ldots \cap A_{10,5}) & = & P(A_{1,5}) \cdot P(A_{2,5}) \cdot P(A_{3,5}) \cdot \ldots \cdot P(A_{10,5}) \\
 & = & f_5 \cdot f_5 \cdot f_5 \cdot \ldots \cdot f_5 \\
 & = & (f_5)^{10} = (0.04)^{10} \approx 0 \qquad (1.048576e - 14).
\end{array}$$

- „9 mal PDS"

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_{1,5} \cap A_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \ldots \cap A_{10,5}) &= P(\bar{A}_{1,5}) \cdot P(A_{2,5}) \cdot P(A_{3,5}) \cdot \ldots \cdot P(A_{10,5}) \\ &= (1 - f_5) \cdot f_5 \cdot f_5 \cdot \ldots \cdot f_5 \\ &= (1 - f_5) \cdot (f_5)^9 = 0.96 \cdot (0.04)^9 \ \approx 0 \quad (2.516582e - 13) \end{aligned}$$

Analog:

$$P(A_{1,5} \cap \bar{A}_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \ldots \cap A_{10,5}) = f_5 \cdot (1 - f_5) \cdot f_5 \cdot \ldots \cdot f_5 = (1 - f_5) \cdot (f_5)^9$$

Insgesamt gilt:

$$\begin{aligned} P(\text{„Mindestens 9 mal PDS"}) &= (f_5)^{10} + 10 \cdot (1 - f_5) \cdot (f_5)^9 \\ &= (0.04)^{10} + 10 \cdot (0.96) \cdot (0.04)^9 \\ &= 0.2527 \cdot 10^{-11} \approx 0 \end{aligned}$$

Also selbst bei sehr kleinem Stichprobenumfang ($n = 10$) ist die Wahrscheinlichkeit einer extremen Verzerrung hin zur PDS sehr gering.