1.5.4 Quantile und Modi

Bem. 1.70. [Quantil, Modus]

Analog zu Statistik I kann man auch Quantile und Modi definieren.
Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit Wahrscheinlichkeitsverteilung P_X und Verteilungsfunktion F_X.

a) Für $\alpha \in (0, 1)$ heißt x_α zugehöriges α-*Quantil* genau dann, wenn $F(x_\alpha) = \alpha$. Insbesondere ergeben sich für α=0.5 der *Median* und für α=0.25 bzw. 0.75 das *25%* bzw. *75% Quantil*.

b) Ist X diskret, so heißt jedes x_{mod} mit

$$P(X = x_{mod}) \geq P(X = x), \text{ für alle } x \in \mathcal{X}$$

<u>*Modus von P_X*</u>.

Ist X stetig mit Dichtefunktion f_X, so heißt jedes x_{mod} mit $f_X(x_{\text{mod}}) \geq f_X(x)$, für alle $x \in \mathcal{X}$ Modus von P_X (bezüglich der Dichte f_X).

Bem. 1.71. [Modalbereiche]

Ist der Modus x_{mod} eindeutig und X diskret, so ist dies derjenige Punkt, der die höchste Wahrscheinlichkeit besitzt, einzutreten.
Dies kann man auf "zusammenhängende" Bereiche mit vorgegebener Sicherheit ausweiten:
Sei $\gamma \in (0,1)$. Ein Intervall $A_\gamma \subset \mathbb{R}$, $A_\gamma = [a, b]$, heiße *Modalintervall zum Niveau* γ, wenn gilt

$$P(X \in A_\gamma) \geq \gamma$$

und $P(X \in C) < \gamma$ für alle Intervalle $C \subset \mathbb{R}$, $C = [c, d]$ mit $d - c < b - a$. Dann ist $A_\gamma \cap \mathcal{X}$ kleinster ("präzisester") zusammengehöriger Bereich, der mindestens Wahrscheinlichkeit γ besitzt.
Ist X diskret, so ist $A_\gamma \cap \mathcal{X}$ ein Bereich benachbarter Punkte, bei stetigem X mit Träger $\mathbb{R}$ ist A_γ ein Intervall.