Mathematische Ergänzung für Nebenfachstudierende

Übungsblatt 10 **(Schneider, Plaß)** **Sommersemester 15**

Wiederholungsaufgabe zu wichtigen Begriffen: Gradienten, Jacobimatrix, Hessematrix, totales Differential

Aufgabe 25

a) Gegeben sei die folgende Jacobimatrix einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$J_f = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 3y^2 & 2z \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Dimensionen n und m.
- Nennen Sie alle partiellen Ableitungen und geben Sie den Gradienten von f_2 an.
- Wie verändert sich der Funktionswert von f, wenn man ausgehend vom Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 1)$ sich gleichzeitig parallel zur x-, zur y- und zur z-Achse um jeweils 0.05 Einheiten bewegt?

b) Gegeben sei nun die Hessematrix einer Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

$$H_g = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Geben Sie die Dimensionen n und m an.
- Besitzt die Funktion g einen Sattelpunkt, ein relatives Minimum oder ein relatives Maximum?

Aufgabe 26 (Kettenregel, Totales Differential)

Betrachten Sie die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ \frac{x_2}{x_3} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 + y_2 \\ \sin(y_1) \\ \ln(y_2) \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Jacobimatrix der Verkettung $g \circ f$, indem Sie zunächst die Jacobimatrix von f und g berechnen und anschließend die Kettenregel anwenden.

b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie zunächst die verkettete Funktion $g \circ f$ berechnen und dann die entsprechende Jacobimatrix hiervon bestimmen.

c) Wie verändert sich der Funktionswert von $g \circ f$ bei einer geringfügigen Veränderung von 0.05 Einheiten parallel zur x_1-Achse, 0.1 Einheiten parallel zur x_2-Achse und 0.02 Einheiten parallel zur x_3-Achse und einem konkreten Ausgangspunkt von $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -1)$?