

Aufgabe 1 (Fortsetzung von Blatt 3, Aufgabe 1)

Vergegenwärtigen Sie sich zunächst erneut die Situation von Aufgabe 1 auf Blatt 3. Zusätzlich zu den in der Aufgabe gegebenen Informationen sei nun bekannt, dass jede ME von P_1 einen Gewinn von 3 Euro und jede ME von P_2 einen Gewinn von 4 Euro erzielt.

- d) Formulieren Sie die Bestimmung einer optimalen Mengenaufteilung als Standard-Maximum-Problem. Nutzen Sie Resultate aus der Vorlesung zur Bestimmung einer Optimallösung $z^* \in Z$. Interpretieren Sie diese Lösung graphisch.
- e) Bilden Sie das (zu d)) duale lineare Optimierungsproblem und bestimmen Sie auch hier eine Optimallösung.

Hinweis: Es müssen hierzu *nicht* die Extrempunkte des dualen Restriktionspolyeders bestimmt werden. Verwenden Sie stattdessen geeignete Resultate zur Dualität aus der Vorlesung.

Aufgabe 2 (Entscheidungskriterien und -prinzipien)

- a) Geben Sie ein Beispiel für ein Entscheidungsproblem, in dem keine zulässige Aktion existiert.
- b) Geben Sie ein Beispiel für ein Entscheidungsproblem, in dem eine unzulässige Maximin-Aktion existiert.
- c) Sei nun $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ ein endliches Entscheidungsproblem, $|\Theta| = m \in \mathbb{N}$ und ξ das wahre Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Theta, 2^\Theta)$, wobei gelte: $\xi(\{\theta_j\}) > 0$ für alle $j = 1, \dots, m$.
Zeigen Sie: Jede ξ -optimale Aktion ist zulässig.

Aufgabe 3 (frei nach R.A. Fisher (1935). The Design of Experiments. Oliver and Boyd publishers.)

Eine Lady, die täglich um 17 Uhr ihren Tee serviert bekommt, behauptet, sie würde am Geschmack erkennen, ob bei dem ihr servierten Tee zuerst die Milch und dann der Tee eingegossen wurde oder umgekehrt. Tee, bei dem die Milch zuerst in der Tasse war, schmecke ihr nicht, und sie ließe diesen Tee sofort stehen.

Lord Peter, der die Lady als wichtige Zeugin in einem Mordfall benötigt, muss sich entscheiden, ob er die Lady als glaubwürdig einstuft oder nicht. Um die Lady auf die Probe zu stellen, besticht er das Küchenmädchen und fordert dieses auf, an drei aufeinanderfolgenden Tagen die Reihenfolge des Füllens der Tassen zufällig festzulegen, den entsprechenden Tee zu servieren und die Reaktion der Lady zu beobachten. Danach solle sie ihm mitteilen, an wie vielen der drei Tagen die Lady die Füllreihenfolge richtig erkannt hat.

- (a) Formulieren Sie Lord Peters Entscheidungsproblem als Testproblem (im entscheidungstheoretischen Kontext) mit den Hypothesen

H_0 : Die Lady rät nur, ist also unglaubwürdig.

H_1 : Die Lady erkennt tatsächlich mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% die wahre Reihenfolge, ist also glaubwürdig.

und der Verlustfunktion, die richtigen Entscheidungen den Verlust 0 und falschen Entscheidungen den Verlust 1 zuordnet! Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

- (i) Rekapitulieren Sie das entsprechende datenfreie Entscheidungsproblem! Beschränken Sie sich dabei auf reine (also unrandomisierte) Aktionen.
 - (ii) Formulieren Sie die Informationsstruktur (das statistische Modell) des zugehörigen datengestützten Entscheidungsproblems!
 - (iii) Bestimmen Sie das zugehörige Auswertungsproblem! Beschreiben Sie dabei die (unrandomisierten) Entscheidungsfunktionen als Tests mit zugehörigem Ablehn- und Annahmehereich sowie der Fehlerwahrscheinlichkeit erster und zweiter Art.
- (b) Bestimmen Sie die Minimax-Aktion des Auswertungsproblems (d.h. den optimalen Test nach dem Minimax-Entscheidungskriterium für die vorliegende Situation)!
- (c) Geben Sie sich nun ein Signifikanzniveau α von 30% vor! Welcher der Niveau- α -Tests für die vorliegende Situation ist optimal im Sinne einer minimalen Fehlerwahrscheinlichkeit zweiter Art?
- (d) Diskutieren Sie die in (b) und (c) erhaltenen Tests aus statistischer Perspektive! Welcher Test erscheint Ihnen für die vorliegende Situation sinnvoller?
- (e) Nehmen Sie nun an, Lord Peter kenne das wahre W -maß ξ auf $(\Theta, 2^\Theta)$, welches durch den Vektor $(0.6, 0.4)^T$ induziert werde. Bestimmen Sie die ξ -optimale Aktion des Auswertungsproblems (d.h. den optimalen Test nach dem Bernoulli-Entscheidungskriterium bezüglich ξ für die vorliegende Situation)!