Aufgabe 1 (Ein Beispiel aus der Produktionsplanung)

Ein Unternehmer stelle die Produkte P_1 und P_2 her. Die dazu benötigten Mittel (Maschine, Rohstoffe, Arbeitskraft) sind wie folgt beschränkt:

- Maximale Maschinenlaufzeit: 1200 h
- Maximal verfügbare Rohstoffmenge: 3000 Mengeneinheiten (ME)
- Maximal verfügbare Arbeitszeit: 125 h

Die Mittel verteilen sich wie folgt auf je eine ME des Produkts P_i, $i = 1, 2$:

	P_1	P_2
Maschine	3 h	2 h
Rohstoff	5 ME	10 ME
Arbeitskraft	0 h	0.5 h

a) Beschreiben Sie die Menge $Z \subset \mathbb{R}^2$ aller Mengenaufteilungen auf P_1 und P_2, die mit den vorgegebenen Beschränkungen verträglich sind! Um welche Art von Menge handelt es sich bei Z?

b) Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis graphisch!

c) Welche Produktionsmengen (d.h. Elemente von Z) nutzen die vorhandenen Produktionsfaktoren so weit wie möglich aus? Was sind die Extremalpunkte von Z?

Aufgabe 2

Sei (Ω_n, Σ_n) ein Messraum mit $|\Omega_n| = n$ und $\Sigma_n := 2^{\Omega_n}$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: Die Menge $\mathcal{P}_n$ aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf (Ω_n, Σ_n) ist bijektiv abbildbar auf den *Einheitssimplex*

$$\Delta_{n-1} := \Big\{ x \in [0,1]^n : \ \textstyle\sum_{i=1}^n x_i = 1 \Big\}$$

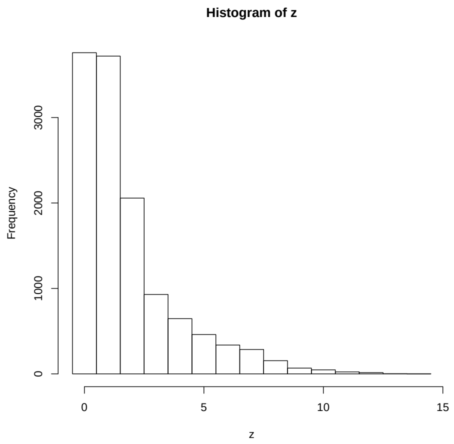
(b) Stellen Sie die Menge Δ_2 graphisch dar.

(c) Seien die Punkte $P_1 = (1, 0, ..., 0)', \ldots, P_n = (0, ..., 0, 1)' \in \Delta_{n-1}$ gegeben. Zeigen Sie:

$$\operatorname{conv}\Big(\{P_1, \ldots, P_n\} \Big) = \Delta_{n-1}$$

Aufgabe 3

Betrachtet werde das folgende Histogramm, das Auskunft über die Verteilung der Anzahl an Schadensfällen pro Versichertem geben möge (N=12500). Unter der Annahme, dass die Daten i.i.d. Poissonverteilt sind, wird der Erwartungswert geschätzt; man erhält $\hat{\lambda} = 1.7830$. Sicherheitshalber wird auch noch die Stichprobenvarianz s^2 berechnet, das Ergebnis ist 4.3056. Wie erklären Sie sich diese Diskrepanz?



Aufgabe 4 (Mischen von Normalverteilungen)

Simulieren Sie in R 1000 Ausprägungen $(x_1, \dots, x_{1000})$ der standardnormalverteilten Zufallsvariable $X \sim N(0,1)$ und 500 Ausprägungen $(y_1, \dots, y_{500})$ der normalverteilten Zufallsvariable $Y \sim N(10,3)$. Fassen Sie die Ausprägungen anschließend in einem Vektor $z := (x_1, \dots, x_{1000}, y_1, \dots, y_{500})$ zusammen.

a) Plotten Sie basierend auf z ein Histogramm der relativen Häufigkeiten (mit Säulenbreite=1).

b) Plotten Sie in das selbe Bild die Dichtefunktion einer $N(\bar{z}, s_z^2)$-verteilten Zufallsvariable.

c) Plotten Sie in das selbe Bild die Dichtefunktion einer $\frac{2}{3}N(0,1) + \frac{1}{3}N(10,3)$-verteilten Zufallsvariable.

d) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus a), b) und c). Wie beurteilen Sie die Situation?

e) Variieren Sie die Parameter μ und σ^2 der Verteilung von Y und verschaffen Sie sich einen Eindruck über die Flexibilität von Mischverteilungen.