Aufgabe 1 Petersburger Paradoxon

Das *Petersburger Paradoxon* geht auf Nicolas Bernoulli (1687 – 1759) zurück. Im Folgenden soll zunächst das dem Paradoxon zugrunde liegende *Petersburger Spiel* genauer untersucht werden. Schließlich soll das resultierende Paradoxon aufgezeigt und mögliche Lösungsansätze diskutiert werden.

Beim Petersburger Spiel wird eine (ideale) Münze mit den Seiten K („Kopf") und Z („Zahl") genau so oft geworfen, bis zum ersten Mal „Zahl" erscheint. Geschieht dies bereits beim ersten Mal, zahlt einem die Bank 1 €, erscheint „Zahl" erst beim zweiten Wurf, so erhält man 2 €, beim dritten Wurf 4 €, beim vierten Wurf 8 € usw. (in der Originalproblemstellung ging es allerdings um *Dukaten*).

(a) Welchen Preis würden Sie intuitiv für dieses Spiel zahlen?

(b) Formalisieren Sie die Spielsituation durch ein geeignetes Paar bestehend aus

- einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- einer die Auszahlung beschreibenden Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Hinweis: Die *Ergebnisse* haben die Form $1, (0,1), (0,0,1), \dots$ (wobei $0 \widehat{=} K$ und $1 \widehat{=} Z$). Inbesondere ist die Ergebnismenge *abzählbar* und es kann die *Potenzmenge* als σ-Algebra verwendet werden. In solchen Situationen sind Wahrscheinlichkeitsmaße *eindeutig* durch ihre Werte auf den Elementarereignissen charakterisiert.

(c) Weisen Sie nach, dass für den Erwartungswert der Auszahlung, also für den „formal fairen" Preis dieses Spiels, folgendes gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) = \infty$$

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus a) und c). Wie kann man den Unterschied erklären? Was bedeutet dieser Unterschied für die Entscheidungstheorie? Machen Sie sich Gedanken über mögliche Auswege aus dieser paradoxen Situation.

Aufgabe 2 „Lieber rot als tot?"

Im Rahmen der Friedensbewegung stützten die Gegner der atomaren Aufrüstung ihre Argumentation häufig auf folgende Konsequenzentafel:

	θ_1	θ_2
a_1	c_{11}	c_{12}
a_2	c_{21}	c_{22}

a_1: atomare Aufrüstung
a_2: atomare Abrüstung
θ_1: Krieg
θ_2: Frieden
c_{11}: „Leben" nach einem Atomkrieg
c_{21}: Leben unter einem verhassten Gesellschaftssystem
c_{12}: status quo
c_{22}: status quo *ohne* Rüstungskosten

Die Aufrüstungsgegner argumentierten dann folgendermaßen: Offensichtlich wird man c_{21} gegenüber c_{11} und c_{22} gegenüber c_{12} präferieren. Damit ist sowohl bei θ_1 als auch bei θ_2 die Aktion a_2 der Aktion a_1 überlegen. Dem *Dominanzprinzip* [1] folgend sollte man also unbedingt abrüsten.

[1] *Bemerkung:* Das Dominanzprinzip wurde bisher in der Vorlesung nur exemplarisch behandelt. Für diese Aufgabe reicht die folgende (vereinfachte) Version: Es ist irrational Aktion a zu wählen, wenn Aktion b unter jedem Zustand wünschenswertere Konsequenzen hat. Eine formale Definition des Prinzips folgt dann später in der Vorlesung.

(a) Wie beurteilen Sie (aus entscheidungstheoretischer Sicht) diese Argumentation? Gehen Sie dabei davon aus, dass Unsicherheitstyp I' vorliegt.

(b) Wie könnte man die Entscheidungssituation entscheidungstheoretisch geeigneter formalisieren?

Aufgabe 3 Einbettung der Schätztheorie in die Entscheidungstheorie

Versuchen Sie, die Aufgabenstellung bei der Schätzung eines unbekannten Parameters $\nu \in \mathbb{R}$ als datenfreies Entscheidungsproblem zu formalisieren. Diskutieren Sie dabei auch verschiedene geeignete Verlustfunktionen.