

### Aufgabe 3

Gegeben sei das folgende datenfreie Entscheidungsproblem:

$u(a_i, \theta_j)$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$
$a_1$	0	500	5 800	6 000
$a_2$	500	0	6 300	6 800
$a_3$	10 000	1 500	0	1 640
$a_4$	3 000	5 000	1 300	0
$a_5$	3 500	7 000	400	600

Zudem werde das wahre Wahrscheinlichkeitsmaß  $\xi$  auf  $(\Theta, 2^\Theta)$  durch die folgende Festlegung induziert:

$$\xi(\{\theta_j\}) = \begin{cases} 0.28 & \text{falls } j = 1 \\ 0.12 & \text{falls } j = 2 \\ 0.55 & \text{falls } j = 3 \\ 0.05 & \text{falls } j = 4 \end{cases}$$

- (a) Formulieren Sie die Suche nach einer  $\xi$ -optimalen *randomisierten* Aktion  $\lambda^* \in \mathcal{M}(\mathbb{A})$  (siehe allgemeiner Hinweis unten oder Vorlesungsunterlagen) als Standard-Maximum-Problem. Formulieren Sie hierbei die Nebenbedingungen und die Zielfunktion explizit in Matrix- bzw. Vektornotation.
- (b) Bestimmen Sie eine optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems aus a) mithilfe der Funktion `lp()` des Paketes `lpSolve` in R. Wie hoch ist der Bernoulli-Nutzen der optimalen Aktion? Was fällt Ihnen an der Optimallösung auf?
- (c) Sei nun  $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$  ein Entscheidungsproblem mit  $|\mathbb{A}| < \infty$  und  $|\Theta| < \infty$  und sei  $\xi$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\xi$  auf  $(\Theta, 2^\Theta)$ . Sei weiter  $\lambda^* \in \mathcal{M}(\mathbb{A})$  eine  $\xi$ -optimale randomisierte Aktion.

Es gilt dann die folgende Aussage:

$$\exists a^* \in \mathbb{A} : \mathbb{E}_\xi[u(a^*)] = \mathbb{E}_\xi[\tilde{u}(\lambda^*)] \quad (1)$$

Was bedeutet dies für die Entscheidungstheorie?

- (d) Beweisen Sie (1)!

*Hinweis:* Hier führen mehrere Wege zum Ziel! Eine elegante Variante ist die folgende: Stellen Sie das in (a) formulierte lineare Optimierungsproblem für ein allgemeines endliches Entscheidungsproblem auf und nutzen Sie die in der Vorlesung besprochenen Resultate zur linearen Optimierung um die Proposition nachzuweisen.

*Allgemeiner Hinweis zur Aufgabe:* Sei  $\mathfrak{A} := (\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$  ein Entscheidungsproblem mit  $|\Theta| < \infty$  (d.h.  $\mathfrak{A}$  kann durchaus auch die gemischte Erweiterung eines endlichen Entscheidungsproblems  $\mathfrak{A}_0$  sein). Sei weiter  $\xi$  das wahre W'-maß auf  $(\Theta, 2^\Theta)$ . Dann heißt die Abbildung

$$\Phi_\xi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad a \mapsto \mathbb{E}_\xi[u(a)]$$

(wobei für festes  $a \in \mathbb{A}$  gilt:  $u(a) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  ,  $\theta \mapsto u(a)(\theta) := u(a, \theta)$ ) das *Bernoulli-Kritrium* bezüglich  $\xi$ .

Jede bezüglich des Kriteriums  $\Phi_\xi$  optimale Aktion heißt dann *Bernoulli-Aktion bezüglich  $\xi$*  (oder kurz:  $\xi$ -optimal.)

Formalitäten:

- Ihre Lösung kann in Deutsch oder Englisch geschrieben werden.
- Die Abgabefrist ist Montag, der 22. Juni 2015, 23:59 Uhr (MESZ).
- Senden Sie Ihre Lösung der Aufgabenteile (a), (c) und (d) als PDF-Datei ("*Ihr Name*\_Aufgabe2.pdf") und Ihren (*ausführlich kommentierten*) R-Code für Aufgabenteil (b) als R-Datei ("*Ihr Name*\_Aufgabe2.r") per E-Mail (mit Betreff [ET-Aufgabe 2]) an Christoph Jansen.