2 Technische Ergänzungen zur Entscheidungstheorie

2.1 Konvexe Mengen

2.1.1 Konvexe Mengen

Def. 2.1 (konvexe Mengen)

Seien $\mathbb{V}$ ein Vektorraum und $z_1, \ldots, z_n$ Elemente von $\mathbb{V}$.

a) Mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda_\ell \leq 1, \ell = 1, \ldots, n$, und $\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell = 1$ sowie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{V}$ heißt

$$z := \lambda_1 \cdot z_1 + \lambda_2 \cdot z_2 + \ldots + \lambda_n \cdot z_n \tag{2.1}$$

Konvexkombination von $z_1 \ldots z_n$.

b) Für $x, y \in \mathbb{V}$ heißt die Menge

$$[x, y] := \{\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y | 0 \leq \lambda \leq 1\} \tag{2.2}$$

aller Konvexkombinationen von x und y *Verbindungsstrecke* zwischen x und y.

c) Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{V}$ heißt *konvex*, wenn für alle $z_1, z_2 \in \mathcal{M}$ gilt:

$$z_1 \in \mathcal{M}, z_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow [z_1, z_2] \subseteq \mathcal{M}\,.$$

Bsp. 2.3 (Beispiele für konvexe Mengen)

Lemma 2.4 (Äquivalentes Kriterium)

$\mathcal{M}$ ist konvex im Sinne von Definition 2.1 genau dann, wenn gilt:

$$\forall q, \lambda_1, ..., \lambda_q \geq 0, \sum_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell = 1, z_1, ..., z_q \in \mathcal{M} \text{ gilt} : \sum_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell z_\ell \in \mathcal{M}$$

2.1.2 Mischungen von Verteilungen

Bem. 2.5 (Mischungen von Verteilungen)

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mathcal{P}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Gegeben seien q Elemente $p_1(\cdot), \ldots, p_q(\cdot) \in \mathcal{P}$ (also Wahrscheinlichkeitsmaße) und reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ mit $0 \leq \lambda_\ell \leq 1, \ \ell = 1, \ldots, q$, und $\sum_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell = 1$.

Definiert man die *Mischung* $\bar{p}(\cdot)$ von $p_1(\cdot), \ldots, p_q(\cdot)$ vermöge

$$\bar{p}(A) = \sum_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell p_\ell(A), \quad A \in \mathcal{A}, \tag{2.3}$$

so ist $\bar{p}(\cdot)$ wieder ein Element von $\mathcal{P}$. Die Menge $\mathcal{P}$ ist folglich konvex.

Ferner gilt auch für $k \in \mathbb{N}$: Ist X k-fach integrierbar bzgl. $p_1(\cdot), p_2(\cdot), ..., p_q(\cdot)$, so ist X auch k-fach integrierbar bezüglich $\bar{p}(\cdot)$. Für die Momente um 0 (!) gilt dann auch

$$\mathbb{E}_{\bar{p}(\cdot)} X^k = \sum_{l=1}^{q} \lambda_\ell \mathbb{E}_{p_\ell(\cdot)} X^k \tag{2.4}$$

Haben $p_1(\cdot), ..., p_q(\cdot)$ die Dichten bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktionen (bzw. allgemeiner die ν-Dichten) $f_1(\cdot), ..., f_q(\cdot)$, so hat $\overline{p}(\cdot)$ die Dichte bzw.

Wahrscheinlichkeitsfunktion (bzw. allgemeiner die ν-Dichte)

$$\overline{f}(\cdot) = \sum_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell \cdot f_\ell(\cdot). \tag{2.5}$$

Bem. 2.6

- Man beachte, dass im Allgemeinen für $\mathcal{P}$ nicht eine Standardklasse von Verteilungen gewählt werden kann. Zum Beispiel ist die Menge aller Normalverteilungen nicht abgeschlossen gegenüber Mischungen. Dies mag zunächst enttäuschen, gewährt aber andererseits große Flexibilität in der Modellierung, da man durch Mischen eben sehr komplexe Formen erzeugen kann.

- Die Beschränkung auf Momente um 0 in (2.4) ist wesentlich; bspw. Varianzen kann man nicht so einfach zusammenzählen.

2.1.3 Konvexe Hülle, konvexe Polyeder

Def. 2.7 (Konvexe Hülle)

Sei $\mathcal{M}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{V}$.

a) Der Schnitt aller konvexen Obermengen von $\mathcal{M}$ heißt *konvexe Hülle*.
(Die konvexe Hülle von $\mathcal{M}$ ist also die „kleinste konvexe Menge, die $\mathcal{M}$ umfasst".)
Schreibweise: $\operatorname{conv}(\mathcal{M})$

b) Ist $\mathcal{M}$ endlich, so heißt $\operatorname{conv}(\mathcal{M})$ auch *konvexes Polyeder (Polytop)*.

Bem. 2.8

- Polyedrische Menge: Schnitt endlich vieler „Halbräume“˙
  Konvexes Polyeder : beschränkte polyedrische Menge

- Der Begriff „konvexes Polyeder“ wird in der Literatur nicht ganz einheitlich gebraucht. Gelegentlich werden alle Mengen, die sich als Schnitt endlich vieler Halbräume darstellen lassen als konvexe Polyeder bezeichnet.Die Vorlesung folgt der Konvention, solche Mengen als polyedrische Mengen zu bezeichnen. Man kann zeigen, dass ein Polyeder im Sinne der Vorlesung dann genau eine polyedrische Menge ist, die zusätzlich beschränkt ist. Im $\mathbb{R}^k$ werden die die Halbräume begrenzenden Hyperebenen als Begrenzungslinien bezeichnet.

Proposition 2.9 *Andere Charakterisierung der konvexen Hülle*

Die konvexe Hülle $\operatorname{conv}(\mathcal{M})$ ist die Menge aller Konvex-Kombinationen von Punkten aus $\mathcal{M}$:

$$\operatorname{conv}(\mathcal{M}) =$$

$$= \left\{ \sum_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell z_\ell \,\middle|\, \sum_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell = 1, q \in \mathbb{N},\ 0 \le \lambda_\ell \le 1,\ z_\ell \in \mathcal{M}, \ell = 1, \ldots, q \right\}$$

Bsp. 2.11 (nach Büning / Naeve / Trenkler / Waldmann) *(2000, p. 327f, 333f)*

Dieses Beispiel ist typisch für die Produktionsplanung (vgl. Beispiel in Abschnitt 1.3.6); es wird in Kapitel **??** immer wieder verwendet.

Ein Unternehmer stelle die Produkte P_1 und P_2 her. Die dazu benötigten Mittel sind wie folgt beschränkt:

Maschine:	maximal 1200h	
Rohstoffe:	maximal 3000 Mengeneinheiten (ME)	und verteilen sich
Arbeitskraft:	maximal 125h	

wie folgt auf je eine Mengeneinheit des Produkts $P_\ell, \ell = 1, 2$

	P_1	P_2
Maschine	3h	2h
Rohstoff	5ME	10ME
Arbeitskraft	0h	0.5h

a) Beschreiben Sie die Menge aller möglichen Produktionsmengen P_1 und P_2, die mit den vorgegebenen Beschränkungen verträglich sind!

b) Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis graphisch!

c) Welche Produktionsmengen nützen die vorhandenen Produktionsfaktoren so weit wie möglich aus?

2.1.4 Extremalpunkte

Bem. 2.13 *Man kann zeigen: Die Eckpunkte eines konvexen Polyeders* $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^k$ *sind alle Punkte, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:*

i) x *ist ein Schnittpunkt von (mindestens)* k *Begrenzungslinien.*

ii) $x \in \mathcal{M}$.

Bsp. 2.15 (Eckpunkte)

Man betrachte Beispiel 2.11 und bestimme die Menge der Eckpunkte der Menge $\mathbb{A}$ aller möglichen Produktionsmengen.

Satz 2.17 (Extremalpunkte)

a) Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, nichtleer, abgeschlossen und beschränkt.
Dann gilt:

a1) $\mathcal{E}(\mathcal{M}) \neq \varnothing$

a2) Jede lineare Funktion $f : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum und ihr Minimum auf $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ an.

b) Ein konvexer Polyeder ist die konvexe Hülle seiner Extremalpunkte.

Bem. 2.18 (zu a2))

- Der Punkt a2) ist von immenser praktischer Bedeutung; insbesondere bildet er die Grundlage der linearen Optimierung (siehe später), also des Optimierens linearer Funktionen unter linearen Nebenbedingungen. Er führt das Auswerten der Funktion über einer unendlichen Menge auf das Auswerten von endlich vielen Punkten zurück.

- Für die Statistik ist a2) auch deshalb interessant, da der Erwartungswert eine lineare Funktion (bzw. ein lineares Funktional) in den zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmaßen ist.

2.1.5 Randomisierte Aktionen und Konvexität

Korollar 2.19

$\mathcal{M}^{\sigma(\mathbb{A})}$ aus Definition 1.7 ist konvex.

Beweis:

Bem. 2.20 (Geometrische Deutung randomisierter Aktionen)

- $|\Theta| = m < \infty, \quad |\mathbb{A}| = n < \infty$

- a_i wurde mit Nutzenvektor $(\vec{u}_i = u(a_i, \vartheta_1), u(a_i, \vartheta_2), ..., u(a_i, \vartheta_m))^T = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{im})^T$ identifiziert (vgl. Bem. 1.5) In Zeichen $a_i \widehat{=} \vec{u}_i$.

- $\widetilde{a} = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_i & \ldots & a_n \\ p_1 & \ldots & p_i & \ldots & p_n \end{bmatrix}$ mit $p_i = p(\{a_i\})$ hat definitionsgemäß (vgl. Def. 1.9) den Nutzenvektor

$$\vec{u} = (\sum_{i=1}^{n} p_i u_{i1}, \sum_{i=1}^{n} p_i u_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} p_i u_{im})^T \tag{2.6}$$

Vektoriell sind in der direkten Nutzenrepräsentation (vgl. Bemerkung) durch die Identifizierung von randomisierten Aktionen mit ihrem Nutzenvektor dann randomisierte Aktionen und Aktionen, die ja mit ihrem Nutzenvektor identifiziert wurden, Objekte vom selben Typ, nämlich Punkte des $\mathbb{R}^m$.
Es ist (Rechenregel für Vektoren)

$$\widetilde{a} \widehat{=} \vec{u} = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n$$

Also ist jede randomisierte Aktion eine Konvexkombination von reinen Aktionen und umgekehrt.

Satz 2.21 (randomisierte Aktionen als konvexe Hülle)

Sind Θ und $\mathbb{A}$ endlich, so gilt $\mathcal{M}(\mathbb{A}) \widehat{=} \mathrm{conv}(\mathbb{A})$. Damit ist also $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ ein konvexes Polyeder.