Aufgabe 2

a) Zu zeigen: $\mathcal{P}_n \sim \Delta_{n-1}$ (d.h. $\exists$ Bijektion von $\mathcal{P}_n$ nach Δ_{n-1})

Beweis. Sei o.B.d.A. $\Omega_n := \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Definiere die Abbildung

$$\phi : \mathcal{P}_n \to \Delta_{n-1} \quad , \quad \lambda \mapsto (\lambda(\{\omega_1\}), \dots, \lambda(\{\omega_n\}))$$

und zeige: ϕ ist bijektiv.

1.) Wohldefiniertheit: Sei $\lambda \in \mathcal{P}_n$ beliebig. Dann ist $\lambda(\{\omega\}) \in [0,1]$ für alle $\omega \in \Omega_n$, also

$$\phi(\lambda) := (\lambda(\{\omega_1\}), \dots, \lambda(\{\omega_n\})) \in [0,1]^n$$

Ausserdem gilt, da $\lambda \in \mathcal{P}_n$:

$$\textstyle\sum_{i=1}^n \phi(\lambda)_i = \sum_{i=1}^n \lambda(\{\omega_i\}) = \lambda(\Omega) = 1$$

Damit gilt $\phi(\lambda) \in \Delta_{n-1}$. Also ist ϕ wohldefiniert.

2.) Injektivität: Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}_n$ und gelte $\phi(\lambda_1) = \phi(\lambda_2)$. Dann gilt

$$\phi(\lambda_1) := (\lambda_1(\{\omega_1\}), \dots, \lambda_1(\{\omega_n\})) = \phi((\lambda_2(\{\omega_1\}), \dots, \lambda_2(\{\omega_n\})) =: \phi(\lambda_2)$$

und damit $\lambda_1(\{\omega\}) = \lambda_2(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega_n$. $(\star)$

Sei nun $A \in 2^{\Omega_n}$ beliebig.

1.Fall: $A = \emptyset$. Dann $\lambda_1(A) = 0 = \lambda_2(A)$, da $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}_n$.

2. Fall: Sei $A \neq \emptyset$. Dann gilt, da $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}_n$:

$$\lambda_1(A) = \textstyle\sum_{\omega \in A} \lambda_1(\{\omega\}) \overset{(\star)}{=} \sum_{\omega \in A} \lambda_2(\{\omega\}) = \lambda_2(A)$$

Damit $\lambda_1 = \lambda_2$. Also ist ϕ injektiv.

3.) Surjektivität: Sei $x := (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_{n-1}$ beliebig. Definiere die Abbildung

$$\lambda_0 : 2^{\Omega_n} \to [0,1] \quad , \quad A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset \\ \sum_{i \in J(A)} x_i & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $J(A) := \{j \in \{1, \dots, n\} : \omega_j \in A\}$ für $A \in 2^{\Omega_n}$. (warum wohldefiniert?)

Reicht zu zeigen: (1) $\lambda_0 \in \mathcal{P}_n$ und (2) $\phi(\lambda_0) = x$.

Zu (1): (M1) Es gilt:

$$\lambda_0(\Omega_n) := \textstyle\sum_{i \in J(\Omega_n)} x_i = \sum_{i=1}^n x_i \overset{x \in \Delta_{n-1}}{=} 1$$

(M2) Seien $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset 2^{\Omega_n}$ paarweise disjunkt (p.d.).

1.Fall: $A_j = \emptyset$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann:

$$\lambda_0\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lambda_0(\emptyset) = 0 = \sum_{j=1}^{\infty} 0 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_0(A_j)$$

2.Fall: $\exists j \in \mathbb{N} : A_j \neq \emptyset$. Dann (warum?):

$$\begin{aligned}
\lambda_0\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) &:= \sum_{i \in J\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)} x_i \\
&= \sum_{i \in \bigcup_{j=1}^{\infty} J(A_j)} x_i \\
&\overset{\text{(p.d.)}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in J(A_j)} x_i \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_0(Aj)
\end{aligned}$$

Damit gilt (1).

Zu (2): Es gilt (selbst nachrechnen!):

$$\phi(\lambda_0) = (\lambda_0(\{\omega_1\}), \dots, \lambda_0(\{\omega_n\})) = (x_1, \dots, x_n) =: x$$

Also ist ϕ surjektiv.

Insgesamt folgt mit 1.), 2.) und 3.): ϕ ist eine Bijektion. $\square$

b) Wurde in der Übung bereits besprochen.

c) Zu zeigen: $\operatorname{conv}(\{P_1, \dots, P_n\}) = \Delta_{n-1}$

Erinnerung: Für $M \subset V$, wobei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, gilt (nach Proposition aus der Vorlesung):

$$\operatorname{conv}(M) = \Big\{\textstyle\sum_{\ell=1}^{q} \alpha_\ell z_\ell : q \in \mathbb{N} \ \wedge \ (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \Delta_{q-1} \ \wedge \ z_\ell \in M \ \forall \ell = 1, \dots, q\Big\}$$

Beweis. " $\supset$ " : Sei $x \in \Delta_{n-1}$. Dann gilt:

$$x = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_i$$

Damit $x \in \operatorname{conv}(\{P_1, \dots, P_n\})$ mit $q := n$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := (x_1, \dots, x_n)$ und $z_\ell := P_\ell$ für $\ell = 1, \dots, n$.

" $\subset$ " : Sei nun $x \in \operatorname{conv}(\{P_1, \dots, P_n\})$. Dann gibt es $q \in \mathbb{N}$ und $(\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \Delta_{q-1}$ und $z_1, \dots, z_q \in \{P_1, \dots, P_n\}$ mit $x = \sum_{\ell=1}^{q} \alpha_\ell z_\ell$.

Wähle nun (warum ist das möglich?) $g : \{1, \dots, q\} \to \{1, \dots, n\}$ mit $z_\ell = P_{g(\ell)}$ für alle $\ell \in 1, \dots, q$.

Setze weiter, für $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\vartheta_i := \sum_{\ell \in g^{-1}(\{i\})} \alpha_\ell \cdot P_{g(\ell)}$$

wobei $\sum_{\ell \in \emptyset} \alpha_\ell := 0$. Dann gilt:

$$x \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{q} \alpha_\ell z_\ell = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \Big(\sum_{\ell \in g^{-1}(\{i\})} \alpha_\ell \Big) = \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i \cdot P_i = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vdots \\ \vartheta_n \end{pmatrix} \in [0,1]^n \text{ (warum?)}$$

Außerdem gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell \in g^{-1}(\{i\})} \alpha_\ell = \sum_{\ell=1}^{q} \alpha_\ell = 1$$

Damit $x \in \Delta_{n-1}$. $\square$