Aufgabe 1

Seien $\Omega = \{a, b, c, d\}$ (mit a, b, c, d paarweise verschieden) und die Mengensysteme $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ und $\mathcal{B} \subseteq 2^\Omega$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \Omega\}; \\ \mathcal{B} &:= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \Omega\}. \end{aligned}$$

Stellen Sie die geordneten Mengen $(\mathcal{A}, \subseteq)$ und $(\mathcal{B}, \subseteq)$ (wobei $\subseteq$ die gewöhnliche Mengeninklusion sei) jeweils in einem Hassediagramm dar und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um einen Verband handelt.

Aufgabe 2

Sei I eine beliebige Indexmenge und $(\leq_i)_{i \in I}$ eine Klasse von Ordnungsrelationen (auf derselben Grundmenge X). Zeigen Sie, dass dann der Schnitt

$$\bigcap_{i \in I} \leq_i = \{(x, y) \mid x, y \in X, \forall i \in I : x \leq_i y\}$$

ebenfalls wieder eine Ordnungsrelation auf X ist.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ eine beliebige σ-Algebra. Eine nichtleere Menge $A \in \mathcal{F}$ heißt Atom der σ-Algebra $\mathcal{F}$, falls jede echte messbare Teilmenge von A bereits leer ist, d.h., es gilt:

$$B \in \mathcal{F} \;\&\; B \subsetneq A \Longrightarrow B = \emptyset.$$

Die Menge aller Atome sei mit $\mathcal{A}$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass die Indikatorfunktion jeder messbaren Menge auf den Atomen konstant ist, d.h., zeigen Sie, dass gilt:

$$\forall B \in \mathcal{F} : \forall A \in \mathcal{A} : [\forall \omega \in A : \mathbb{1}_B(\omega) = 1] \text{ oder } [\forall \omega \in A : \mathbb{1}_B(\omega) = 0].$$

b) Zeigen Sie, dass die Atome genau die messbaren Äquivalenzklassen der von $\mathcal{F}$ erzeugten Ununterscheidbarkeitsrelation $\sim_\mathcal{F}$ sind. (Wir identifizieren hier Mengen mit ihren Indikatorfunktionen, d.h., die Relation $\sim_\mathcal{F}$ ist gegeben durch $\sim_\mathcal{F} = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \Omega, \forall B \in \mathcal{F} : \{\omega_1, \omega_2\} \subseteq B \text{ oder } \{\omega_1, \omega_2\} \subseteq \overline{B}\}$.)

c) Zeigen Sie, dass für $\mathcal{F}$ endlich jedes $\omega \in \Omega$ in (genau) einem Atom liegt und das deshalb dann alle Äquivalenzklassen in diesem Fall messbar sind.

d) Seien nun alle Äquivalenzklassen messbar und sei die Menge der Atome (bzw. Äquivalenzklassen) endlich oder abzählbar. Zeigen Sie, dass in diesem Fall umgekehrt auch Indikatorfunktionen, die auf den Äquivalenzklassen (bzw. Atomen) konstant sind, auch messbar sind.

Folgern Sie daraus, dass jede endliche σ-Algebra eine Mächtigkeit

$$|\mathcal{F}| = 2^{|\mathcal{A}|}$$

besitzt.

e) Zeigen Sie mit Hilfe einer Vitali Menge,[1] dass im Allgemeinen nicht jede Menge, deren Indikatorfunktion auf allen Atomen konstant ist, messbar ist.

f) Sind die geordneten Mengen $(\mathcal{F}, \subseteq)$ und $(2^{\Omega'}, \subseteq)$ mit $\Omega' := \Omega_{/\sim_{\mathcal{F}}}$ isomorph[2]?

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass jede geordnete Menge $(X, \leq)$ darstellbar ist als Unterstruktur eines Potenzmengenverbandes.

Hinweis: Eine geordnete Menge $(W, \sqsubseteq)$ ist eine Unterstruktur einer geordneten Menge $(V, \leq)$, falls $W \subseteq V$ gilt und wenn für alle x, y aus W die Äquivalenz $x \sqsubseteq y \iff x \leq y$ gilt.

Um die geordnete Menge $(X, \leq)$ dann als Unterstruktur eines Potenzmengenverbandes darzustellen kann man sich die Abbildung

$$\Phi : X \longrightarrow 2^X : x \mapsto \downarrow x := \{y \in X \mid y \leq x\}$$

anschauen und zeigen, dass die Äquivalenz $x \leq y \iff \Phi(x) \subseteq \Phi(y)$ gilt. (Aus dieser Äquivalenz folgt dann auch, dass Φ injektiv ist.)

Aufgabe 5

Sei (G, M, I) eine Inzidenzstruktur und die Operatoren $'$ und $`$ definiert durch

$$\begin{array}{lcl} ' : 2^G \longrightarrow 2^M & : & S \mapsto S' := \{m \in M \mid \forall g \in S : gIm\} \\ ` : 2^M \longrightarrow 2^G & : & T \mapsto T` := \{g \in G \mid \forall m \in T : gIm\}. \end{array}$$

Seien weiterhin die Operatoren h und $\tilde{h}$ definiert als

$$\begin{array}{lcl} h & := & ` \circ ' \\ \tilde{h} & := & ' \circ `. \end{array}$$

Bemerkung: Der Operator h (und auch der Operator $\tilde{h}$) ist dann ein Hüllenoperator, d.h., es gilt:

i) $\forall S \in 2^G : h(S) \supseteq S$ (Extensivität);

ii) $\forall S \in 2^G : h(h(S)) = h(S)$ (Idempotenz);

iii) $\forall S, R \in 2^G : S \subseteq R \Longrightarrow h(S) \subseteq h(R)$ (Monotonie).

Wie sehen die Operatoren h und $\tilde{h}$ für die folgenden konkreten Inzidenzstrukturen aus? Verbalisieren Sie dazu zunächst, was die Operatoren $'$ und $`$ jeweils machen.

a) $G = 2^\Omega$, $M =$ Menge aller σ-Algebren über Ω, $I = \{(S, \mathcal{E}) \in G \times M \mid S \in \mathcal{E}\}$

b) $G = M = X$, $I = \leq$, wobei $(X, \leq)$ eine Ordnungsrelation sei.

[1]Von der Vitali Menge müssen Sie nur wissen/benutzen, dass eine Vitali Menge eine Teilmenge reeller Zahlen ist, die nicht Lebesgue-messbar ist.

[2]Zei geordnete Mengen $(V, \leq)$ und $(W, \sqsubseteq)$ heißen isomorph, falls es eine Bijektion $\Phi : V \longrightarrow W$ gibt mit $\forall x, y \in V : x \leq y \iff \Phi(x) \sqsubseteq \Phi(y)$.