Aufgabe 19 (Wichtige Grundbegriffe)

Gegeben seien die folgenden drei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie, ob die Vektoren linear unabhängig sind.

b) Rekapitulieren Sie die folgenden Begriffe aus der Vorlesung:
   - Erzeugendensystem
   - Basis
   - Dimension eines Vektorraums

c) Erkären Sie, warum die hier angegebenen Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ darstellen.

d) Schlagen Sie eine weitere mögliche Basis des $\mathbb{R}^3$ vor.

e) Berechnen Sie den Koordinatenvektor von

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

sowohl bezüglich der von ihnen vorgeschlagenen Basis als auch bezüglich der Basis, welche durch die hier angegebenen Vektoren augespannt wird.

Aufgabe 20 (Lineare Unabhängigkeit und Basis)

Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Sind die beiden Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ linear unabhängig?

b) Bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{z}$ so, dass die Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aufspannen.