

Aufgabe 1

Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge

$$S_k = \frac{\exp(\lambda(X_1 + \dots + X_k))}{(\mathbb{E}(\exp(\lambda X_1)))^k}$$

ein Martingal ist.

Aufgabe 2

Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter nicht negativer Zufallsvariablen mit existierendem Erwartungswert. Bildet die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

ein (Sub-/Super-)Martingal oder überhaupt keines?

Aufgabe 3

Beweisen Sie Satz 13.32 aus der Vorlesung.

Satz 13.32. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge quadratintegrierbarer Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone Folge positiver reeller Zahlen mit $a_n \nearrow \infty$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X_n^2)}{a_n^2} < \infty$$

ist. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X_i | X_{i-1}, \dots, X_1)) \right) = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Aufgabe 4

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) sei eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben bezüglich einer monoton wachsenden Folge von Sub- σ -Algebren $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sei T eine Stoppzeit. Betrachtet wird das Mengensystem

$$\mathcal{A}_T = \{A \in \mathcal{A} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{A}_n \text{ für alle } n\}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass \mathcal{A}_T eine σ -Algebra ist.
- (ii) Sei S eine weitere Stoppzeit mit $S \leq T$. Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{A}_S \subset \mathcal{A}_T$.
- (iii) Zeigen Sie, dass T und X_T \mathcal{A}_T -messbar sind.