

Aufgabe 1

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Bemerkung aus dem Skript:

Bemerkung 12.13 *Es gelten folgende Implikationen für $p > q \geq 1$:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^p\text{-Konvergenz} & \implies & \mathcal{L}^q\text{-Konvergenz} \\ & & \Downarrow \\ \text{fast sichere Konvergenz} & \implies & \text{stochastische Konvergenz} \\ & & \Downarrow \\ & & \text{schwache Konvergenz} \end{array}$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz 12.16

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise unkorrelierter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_n) = 0$ und $\text{Var}(X_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist zudem $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, für welche gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = 0$$

so folgt

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^n X_i = 0,$$

d.h. die Folge $\left(\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^n X_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch gegen 0.

Aufgabe 3

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 12.16. Zeigen Sie, dass die Bedingung von Satz 12.16 mit $a_n = n$ erfüllt ist, wenn die Zufallsvariablen identisch verteilt sind.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass der Satz von de Moivre-Laplace (Satz 12.26 im Skript) ein Spezialfall des Satzes von Lindeberg-Feller (Satz 12.25 im Skript) ist.