Aufgabe 1

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega_1', \mathcal{A}_1')$ und $(\Omega_2', \mathcal{A}_2')$ Messräume. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Seien

$$\begin{aligned} X_1 : \quad & (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega_1', \mathcal{A}_1') \\ X_2 : \quad & (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega_2', \mathcal{A}_2') \end{aligned}$$

stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Sei

$$\varphi : \quad \Omega_1' \times \Omega_2' \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $\mathcal{A}_1' \otimes \mathcal{A}_2'$ - messbare Funktion, so dass

$$\varphi \circ \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P) \quad ,$$

sowie eine $\mathcal{A}_1'$ - messbare Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_1 : \ \Omega_1' & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x_1 & \longmapsto \mathbb{E}_P\big(\varphi(x_1, X_2)\big) = \int_\Omega \varphi(x_1, X_2(\omega))\, P(d\omega) \quad . \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}_P\big[\varphi(X_1, X_2) \,\big|\, X_1\big] \;=\; \psi_1 \circ X_1 \quad .$$

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \;\in\; \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(Y_i) = 0$. Setze

$$X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j \quad .$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt:

$$\mathbb{E}_P\big[X_n \,\big|\, X_1, \ldots, X_{n-1}\big] \;=\; X_{n-1} \quad P\text{ - f.s.}$$

Aufgabe 3

Sei f eine Riemann - integrierbare und g eine stetig differenzierbare Funktion jeweils auf $[a; b]$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_a^b f\, dg \;=\; \int_a^b f g'\, dx \quad .$$