Aufgabe 1

Seien X und Y zwei reelle Zufallsvariablen, welche die 2-dimensionale um 0 zentrierte Normalverteilung $d\mathcal{N}_{\rho,\sigma^2} = f\, d\lambda^2$ mit $\rho \in (-1,1)$ und $\sigma^2 > 0$ besitzen:

$$f(x,y) := \frac{(1-\rho^2)^{1/2}}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 - 2\rho xy + y^2\right)\right)$$

Wie sieht die bedingte Dichtefunktion $f(x \,|\, y)$ aus? Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{E}\left[\, X \,\middle|\, Y \,\right] = \rho Y \quad .$$

Aufgabe 2

Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}^2)$. π_1 bzw. π_2 bezeichne die kanonische Projektion $(x,y) \mapsto x$ bzw. y von $\mathbb{R}^2$ auf die x- bzw. y-Achse. Die Bildmaße $\pi_1(\mu)$ bzw. $\pi_2(\mu)$ heißen dann Marginalmaße von μ.

Man zeige, dass aus der Existenz einer Dichte f für μ bzgl. λ^2 die Existenz einer Dichte für jedes der beiden Marginalmaße folgt und gebe die Dichten an.

Hinweis: Die Randdichte ist gekennzeichnet durch: $f_R(y) = \int f(x,y)\, dx$.

Aufgabe 3

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei

$$C_n \in \mathcal{A} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

so dass $C_n \cap C_m = \emptyset$ für $n \neq m$ und

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

Sei $\mathcal{C}$ die von $C_1, C_2, C_3, \ldots$ erzeugte σ-Algebra. Sei $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Wie sieht dann $\mathbb{E}_P\left[\, X \,\middle|\, \mathcal{C} \,\right]$ aus?