Aufgabe 1

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei P_i ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit Lebesgue-Dichte f_i. Dann ist

$$f \; : \; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$$

eine Lebesgue-Dichte von $P_1 \otimes \cdots \otimes P_n$ auf $\mathbb{R}^n$, das heißt

$$d\big(P_1 \otimes \cdots \otimes P_n\big) \; = \; f\, d\lambda^n\,.$$

Aufgabe 2

Man betrachte die beiden Maßräume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, wobei $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathfrak{B}$, $\mu_1 = \lambda$ und μ_2 ein nicht σ-endliches Zählmaß auf $\mathfrak{B}$ ist. In diesem Fall hier ist μ_2 definiert als

$$\mu_2(A) \longmapsto \begin{cases} |A| & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige, dass für die Diagonale $D = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 = \omega_2\}$ von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \Omega_1 \times \Omega_2$ die Gleichheit

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} I_D(\omega_1, \omega_2)\, \mu_2(d\omega_2)\mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} I_D(\omega_1, \omega_2)\, \mu_1(d\omega_1)\mu_2(d\omega_2)$$

nicht gilt.

Aufgabe 3

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $C \in \mathcal{A}$ und

$$\mathcal{C} \; = \; \sigma(C) \quad .$$

Was ist dann

$$\mathbb{E}\big[X \,\big|\, \mathcal{C}\big]$$

für $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$?