Aufgabe 1

Seien μ, ν zwei Maße auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume, wobei μ_1 und μ_2 σ-endlich sind. Es gelte

$$\mu(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = \mu_1(\mathcal{A}_1) \cdot \mu_2(\mathcal{A}_2)$$

und

$$\nu(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = \mu_1(\mathcal{A}_1) \cdot \mu_2(\mathcal{A}_2)$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes (Satz 3.9), dass

$$\mu = \nu$$

Aufgabe 2

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega_1', \mathcal{A}_1')$, $(\Omega_2', \mathcal{A}_2')$ Messräume. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei

$$X_1 \ : \ \Omega \ \to \ \Omega_1'$$

eine $\mathcal{A}/\mathcal{A}_1'$ - messbare Zufallsvariable und sei

$$X_2 \ : \ \Omega \ \to \ \Omega_2'$$

eine $\mathcal{A}/\mathcal{A}_2'$ - messbare Zufallsvariable. Setze

$$X \ : \ \Omega \ \to \ \Omega_1' \times \Omega_2', \quad \omega \ \mapsto \ \big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big)$$

Dann gilt: X_1 und X_2 sind stochastisch unabhängig, genau dann wenn

$$X(P) \ = \ \big[X_1(P)\big] \otimes \big[X_2(P)\big]$$

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz 8.6 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien*

$$X_1 \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P), \quad X_2 \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P), \quad \ldots, \quad X_n \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Dann ist

$$\mathbb{E}_P\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] \ = \ \prod_{i=1}^n \mathbb{E}_P\big[X_i\big] \tag{1}$$

und

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \ = \ \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}\big(X_i\big)\ . \tag{2}$$

Die folgende Aufgabe ist hauptsächlich zum Selbststudium gedacht.

Aufgabe 4

Seien X und Y zwei stochastisch unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen jeweils auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

a) Leiten Sie die gemeinsame Dichte von $\exp(X)$ und $\exp(Y)$ her.
Sie können dabei eine geeignete Messbarkeit der gemeinsamen Dichtefunktion voraussetzen.

Sei im Folgenden nun $\mu_x = \mu_y = 0$ und $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$.

b) Leiten Sie die Dichte der Verteilung von $S = X + Y$ her.

Hinweis: Die Dichte einer normalverteilten Zufallsvariablen X ist

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) \ .$$