Aufgabe 1

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz 7.1 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktionen mit $f(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann wird durch $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $A \mapsto \int_A f\, d\mu$ ein Maß ν auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert.*
Für

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

schreiben wir auch $d\nu = f\, d\mu$. Falls $d\nu = f\, d\mu$, so gilt auch

$$\int g\, d\nu = \int gf\, d\mu \qquad \forall g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$$

Aufgabe 2

Sei $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\sharp$ das Zählmaß hierauf. Beweisen Sie, dass in diesem Fall gilt:

(1) Für jede nichtnegative Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ ist

$$\int f\, d\sharp = \sum_{i=1}^{\infty} f(i) \qquad .$$

(2) Für jedes Maß ν auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ gilt

$$\nu \ll \sharp \qquad .$$

(3) Für jedes σ-endliche Maß ν auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ist die Dichte von ν bzgl. $\sharp$ gegeben durch

$$i \mapsto \nu(\{i\})$$

(4) Für jedes σ-endliche Maß ν auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und jede ν-messbare nichtnegative Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ ist

$$\int g\, d\nu = \sum_{i=1}^{\infty} g(i) \cdot \nu(\{i\}) \qquad .$$

Aufgabe 3

Sei Ω eine nicht abzählbare Menge und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra, für die entweder A oder A^c abzählbar ist. μ sein ein Zählmaß und ν ist ein Maß mit $\nu(A) = 0$ bzw. $\nu(A) = +\infty$, je nachdem ob A abzählbar ist oder nicht. Wird ν von μ dominiert? Besitzt ν eine Dichte bzgl. μ?