Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ und $g: \Omega \to \mathbb{R}$ zwei $\mathcal{A}$-messbare Funktionen. Man zeige, dass die Teilmengen von Ω, die in den Gleichungen

$$\mu\big(\{\omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}\big) = 0$$

und

$$\mu\big(\{\omega \mid f(\omega) > g(\omega)\}\big) = 0$$

auftreten, tatsächlich in $\mathcal{A}$ liegen.

Aufgabe 2

Beweisen Sie folgenden Korollar aus der Vorlesung:

Korollar 6.7 (σ-Additivität des Integrals) *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass*

$$f_k(\omega) \geq 0 \qquad \forall \omega \in \Omega$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$. Sei außerdem

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\omega) < \infty \quad \forall \omega \in \Omega\,.$$

Dann ist

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\omega)\mu(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k(\omega)\mu(d\omega)$$

(und die beiden Integrale existieren gemäß Gleichung (6.3).)

Aufgabe 3

Beweisen Sie Teil (b) des folgenden Satzes:

Satz 6.12 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ und $g: \Omega \to \mathbb{R}$ zwei $\mathcal{A}$-messbare Funktionen. Es gilt:*

a)

$$f \geq 0 \quad \text{und} \quad \int f\, d\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \quad \mu\text{-f.s.}$$

b)

$$f = g \quad \mu\text{-f.s.} \Leftrightarrow \quad \int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Aufgabe 4

Betrachtet wird der Maßraum $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}^{\otimes 2}, \lambda^2)$. Gegeben ist eine messbare Funktion ϕ mit

$$\begin{aligned} \phi:\ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ \exp(x+y) \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie das Bildmaß $\phi(\lambda^2)$