Aufgabe 1

Beweisen Sie folgenden Satz:

Satz 4.1 (Eigenschaften von $\mathfrak{B}$)

(i) $\emptyset \in \mathfrak{B}$, $\mathbb{R} \in \mathfrak{B}$

(ii) $\{c\} \in \mathfrak{B} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$

(iii) Für alle $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *ist*

$$[a,b] \in \mathfrak{B} \qquad [a,b) \in \mathfrak{B} \qquad (a,b] \in \mathfrak{B} \qquad (a,b) \in \mathfrak{B}$$

(iv) $\mathbb{N} \in \mathfrak{B}$, $\mathbb{Q} \in \mathfrak{B}$, $\mathbb{Q}^C \in \mathfrak{B}$

Natürlich sind auch jeweils die Komplemente, die (abzählbaren) Vereinigungen und die (abzählbaren) Durchschnitte all dieser Mengen in $\mathfrak{B}$.

Aufgabe 2

Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Für $A \subset \mathbb{N}$ bezeichne $\sharp(A)$ die Anzahl der Elemente in A. Man beweise, dass $\sharp$ ein σ-endliches Maß auf $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$ ist.

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgenden Satz:

Satz 4.7 (Translationsinvarianz) *Sei* $B \in \mathfrak{B}$, $c \in \mathbb{R}$ *und*

$$B_c \;:=\; c + B \;=\; \big\{c + b \;:\; b \in B\big\}\,.$$

Dann ist

$$\lambda(B_c) = \lambda(B)\,.$$

Aufgabe 4

Auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ sei die reelle Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-messbar. Ist dann auch $\sin f$, d.h. die Funktion $\omega \mapsto \sin f(\omega)$, $\mathcal{A}$-messbar?