Aufgabe 1

Für je zwei Mengen A und B heißt

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

die *symmetrische Differenz* von A und B. Zeigen Sie (informell) folgende Rechenregeln:

$$A \triangle B = B \triangle A \tag{1}$$
$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C) \tag{2}$$
$$A \triangle A = \emptyset; \qquad A \triangle \emptyset = A \tag{3}$$
$$A^C \triangle B^C = A \triangle B \tag{4}$$
$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C) \tag{5}$$
$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \triangle \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \triangle B_n) \tag{6}$$

Aufgabe 2

Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{A}_n$ die von System $\mathcal{E}$ der Mengen $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$ und $\Omega := \mathbb{N}$ erzeugte σ-Algebra.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_n$ aus allen Mengen $A \subset \mathbb{N}$ besteht, welche entweder $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ oder $m \in A$ für alle $m \geq n+1$ erfüllen.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ ist.

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz 2.11 (Durchschnitt von σ-Algebren) *Sei Ω eine Menge, sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra auf Ω. Dann ist auch*

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i := \{A \subset \Omega \mid A \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I\}$$

eine σ-Algebra auf Ω.

Aufgabe 4

Sind folgende Systeme von Mengen aus Ω σ-Algebren von Ω?

a) $\mathcal{P}(\Omega)$ mit $\Omega = \mathbb{N}$

b) System aller Mengen $A \subset \Omega$, für welche A oder A^C abzählbar ist; $\Omega = \mathbb{R}$

c) Sei der Ereignisraum $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ gegeben. Ist $\mathcal{F} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\big\}$ eine σ-Algebra?

d) Zeigen Sie anhand eines Beispieles für $\Omega = \{a, b, c\}$, dass $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, die Vereinigung zweier σ-Algebren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ über Ω nicht unbedingt wieder eine σ-Algebra ist.