Aufgabe 1

Der Erneuerungsprozess $N(t)$ sei definiert durch unabhängige und identisch verteilte Lebensdauern $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ mit der folgenden Survivorfunktion:

$$S(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

a) Bestimmen Sie die zugehörige Hazardrate $\lambda(t)$.

b) Seien $T_1 = 1, T_2 = 0.5, T_3 = 2$ Realisierungen der ersten drei Lebensdauern. Skizzieren Sie den entsprechenden Beginn des Pfades von $N(t)$.

c) Interpretieren Sie $N(t)$ als speziellen Zählprozess und skizzieren Sie analog zu b) jeweils den Pfad des zugehörigen Intensitätsprozesses $\alpha(t)$, des kumulierten Intensitätsprozesses $A(t)$ und des Martingals $M(t)$, das sich aus der Doob-Meyer-Zerlegung ergibt.

d) Seien nun T_1, T_2, T_3 unzensierte Lebensdauern von $n = 3$ Individuen mit den gleichen Realisierungen wie in b). Skizzieren Sie den Pfad des Zählprozesses $\tilde{N}(t)$ = Anzahl der in $[0, t]$ verstorbenen Individuen.

e) Skizzieren Sie den zugehörigen Intensitätsprozess $\tilde{\alpha}(t)$.

Aufgabe 2

Betrachtet wird ein Geburtsprozess $\{X(t),\, t \geq 0\}$ mit dem Startwert $X(0) = 1$. Wenn $X(t) = i$ ist, also die Population zum Zeitpunkt t aus i Individuen besteht, dann gilt für die zugehörige Intensität $\lambda_i = \frac{1}{i}$ mit $i = 1, 2, \ldots$

Gegeben sei eine Realisation von $\{X(t)\}$ im Zeitintervall $[0, 10]$, dabei wurden vier Geburten zu den folgenden Zeitpunkten beobachtet:

S_1	S_2	S_3	S_4
0.40	1.80	3.70	8.90

Im Folgenden ist der Zählprozess der Anzahl der Geburten $\{N(t),\, t \geq 0\}$ von Interesse.

a) Skizzieren Sie den realisierten Pfad von $\{N(t)\}$ auf dem Intervall $t \in [0, 10]$.

b) Berechnen und skizzieren Sie den zu $\{N(t)\}$ gehörigen Pfad des Intensitätsprozesses $\{\alpha(t), t \geq 0\}$ sowie des kumulierten Intensitätsprozesses $\{A(t), t \geq 0\}$ auf dem Intervall $t \in [0, 10]$.

c) Skizzieren Sie den Pfad des kompensierten Zählprozesses (also des Martingals $\{M(t), t \geq 0\}$), der sich aus der Doob-Meyer-Zerlegung ergibt, auf dem Intervall $t \in [0, 10]$.

d) Gegeben die Ereigniszeitpunkte $S_1, \ldots, S_4$ – wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $Q^{(4)}(t)$, dass die fünfte Geburt spätestens nach $t = 5$ Zeiteinheiten ab dem Zeitpunkt S_4 eingetreten sein wird?

Hinweis: Verdeutlichen Sie in allen Skizzen, ob die jeweiligen Pfade links- oder rechtsstetig sind.