Aufgabe 1

Sei X_t eine symmetrische einfache Irrfahrt mit $X_t = Z_1 + \ldots + Z_t$ und $X_0 = 0$, wobei $Z_1, Z_2, \ldots, Z_t$ eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Träger $\{-1, 1\}$ bildet.

a) Zeigen Sie, dass X_t^2 ein Submartingal ist (bezüglich der natürlichen Filtration von Z)

b) Bestimmen Sie den Kompensator A_t, für den $X_t^2 - A_t$ ein Martingal ist.

Betrachtet wird nun der folgende abgewandelte Prozess

$$Y_t = \sum_{k=1}^{t} \operatorname{sign}(X_{k-1}) Z_k \quad \text{mit} \quad Y_0 = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} .$$

c) Zeigen Sie, dass Y_t ein Martingal ist (bezüglich der natürlichen Filtration von Z)

Aufgabe 2

Gegeben seien unabhängige und identisch standardnormalverteilte Zufallsvariablen $X_k \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$ für $k = 1, 2, \ldots$ und $X_0 = 0$. Der stochastische Prozess $\{M(t), t \in \mathbb{R}\}$ sei definiert durch

$$M(t) = \sum_{k=0}^{[t]} X_k \ ,$$

wobei $[t]$ für $t \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl $\leq t$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass für diesen Prozess die Martingaleigenschaft gilt.

Aufgabe 3

In der Vorlesung wurde ein Spielsystem vorgestellt, dass einem faire Münzwurf entspricht. Gewettet wird dabei auf das Auftreten von Kopf. Die Strategie besteht darin, solange zu spielen bis einmal Kopf gefallen ist und dabei nach jedem erfolglosen Wurf den Einsatz zu verdoppeln. Mit dieser Strategie kann man mit Wahrscheinlichkeit 1 seinen Ersteinsatz verdoppeln.

Betrachten Sie nun die Situation, dass Sie nach jedem erfolglosen Münzwurf nicht verdoppeln, sondern ihren Einsatz verdreifachen.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert des Gesamtgewinns.

b) Der Einfachheit halber werden maximal nur 5 Spiele gespielt. Bestimmen Sie nun den Erwartungswert des Gesamtgewinns.