Formelsammlung zu Stochastische Prozesse

Stand: 12.06.2014

Diese Formelsammlung darf in den Klausuren verwendet werden. Sie darf nicht durch handschriftliche Notizen und Formeln ergänzt werden (auch nicht auf leeren Rückseiten)! Verwenden Sie dazu eine extra Seite.

1 Einführung & Beispiele

1.1 Irrfahrten

- Eine Folge $X = \{X_t,\ t \in \mathbb{N}_0\}$, mit $X_t = X_{t-1} + Z_t$ und iid Folge $\{Z_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ heißt Irrfahrt auf der Geraden.
- Einfache Irrfahrt: $Z_t \in \{-1, 0, 1\}$ mit $P(Z_t = -1) = q$, $P(Z_t = 0) = r$, $P(Z_t = 1) = p$.
- Gauß-Irrfahrt: $\{Z_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ iid $N(0, \sigma^2)$.

1.2 Autoregressive Prozesse

- Autoregressiver Prozess der Ordnung 1 ($AR(1)$)

$$X_t = \rho X_{t-1} + Z_t, \quad Z_t \text{ iid } (0, \sigma^2)$$

- Autoregressiver Prozess der Ordnung p ($AR(p)$)

$$X_t = \rho_1 X_{t-1} + \ldots + \rho_p X_{t-p} + Z_t, \quad Z_t \text{ iid } (0, \sigma^2)$$

1.3 Moving-Average-Prozess

- Der stochastische Prozess $X = \{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ mit

$$X_t = \sum_{j=0}^{q} \theta_j Z_{t-j}, \quad Z_t \text{ iid } (0, \sigma^2)$$

heißt Moving-Average-Prozess (Prozess der gleitenden Durchschnitte) der Ordnung q.

1.4 Wiener-Prozess

- Ein stochastischer Prozess $W = \{W(t), t \in \mathbb{R}_+\}$, $S = \mathbb{R}$, heißt Wiener-Prozess, wenn gilt:

(W1) Die Zuwächse sind normalverteilt und stationär:

$$W(s+t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2 t) \text{ für alle } s, t \geq 0.$$

(W2) Für alle $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n,\ n \geq 3$ sind die Zuwächse

$$W(t_2) - W(t_1),\ \ldots,\ W(t_n) - W(t_{n-1})$$

unabhängig.

(W3) $W(0) = 0$.

(W4) Die Pfade von W sind stetig.

- $(W(s), W(t))'$ ist für $0 \leq s < t$ bivariat normalverteilt mit Dichte

$$f_{s,t}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{s(t-s)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{x_1^2}{s} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{(t-s)}\right]\right\}.$$

- $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n))'$ ist für $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n, n \in \mathbb{N}$ multivariat normalverteilt mit Dichte

$$f_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1} + \ldots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}\right]\right\}}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^n \sqrt{t_1(t_2-t_1)\cdot\ldots\cdot(t_n - t_{n-1})}}$$

und es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n)) &= 0 \\
\mathrm{Cov}(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n)) &= \sigma^2 \cdot \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \ldots & t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \ldots & t_2 & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_3 & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & & t_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1.5 Poisson-Prozess

- Der Zählprozess $N = \{N(t), t \geq 0\}$ heißt Poisson-Prozess, wenn gilt

(1) N hat unabhängige und stationäre Zuwächse, d.h.

$$\forall n\ \forall t_0 < t_1 < \ldots < t_n \text{ sind } N(t_1) - N(t_0), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1}) \text{ unabhängig,}$$

$$\forall\ 0 \leq t_1 < t_2,\ s > 0 \text{ sind } N(t_2) - N(t_1) \text{ und } N(t_2 + s) - N(t_1 + s) \text{ identisch verteilt,}$$

(2) und

$$P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$$

$$P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h)$$

- $N(t)$ ist Poisson-verteilt mit Rate λt:

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

- Der Poisson-Prozess ist ein (homogener) MP mit

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \exp(-\lambda t) \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & \text{für } i \leq j \\ 0 & \text{für } i > j. \end{cases}$$

- Die Zwischenzeiten T_n sind unabhängig und identisch exponentialverteilt mit Parameter λ:

$$P(T_n \leq t) = 1 - \exp(-\lambda t), \quad t \geq 0.$$

- Sei $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ die Wartezeit auf das n-te Ereignis, $n \geq 1$, $S_0 = 0$. Dann ist S_n Gamma-verteilt mit den Parametern n, λ, d.h. für die Dichte gilt:

$$f_{S_n}(t) = \exp(-\lambda t) \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \text{ für alle } t \geq 0.$$

- Für die Vorwärtsrekurrenzzeiten $V(t)$ und die Rückwärtsrekurrenzzeiten $U(t)$ gilt:

$$P(V(t) \leq x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} P(U(t) = t) &= \exp(-\lambda t) \\ P(U(t) \leq x) &= 1 - \exp(-\lambda x), \quad 0 \leq x < t. \end{aligned}$$

- Sind $L = \{L(t), t \geq 0\}$ und $M = \{M(t), t \geq 0\}$ zwei unabhängige Poisson-Prozesse mit Raten λ bzw. μ, so ist die Überlagerung von L und M

$$N(t, \omega) = L(t, \omega) + M(t, \omega)$$

  ein Poisson-Prozess mit Rate $\lambda + \mu$.

- Es sei N ein Poisson-Prozess mit Rate λ. Bei Eintritt eines Ereignisses wird ein binomisches Experiment X mit $P(X = 1) = p$ und $P(X = 0) = 1 - p$ unabhängig von N, durchgeführt. Für die Zählprozesse M und L der Typ-1 bzw. Typ-0 Ereignisse gilt: M und L sind unabhängige Poisson-Prozesse mit Raten $p\lambda$ und $(1-p)\lambda$.

- Ein Zählprozess $N = \{N(t), t \geq 0\}$ heißt inhomogener Poisson-Prozess mit Rate $\lambda(t)$, $t \geq 0$, wenn gilt

  (1) N hat unabhängige Zuwächse,

  (2) $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$,
  $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$.

- Für einen inhomogenen Poisson-Prozess gilt

$$N(t+s) - N(t) \sim Po\,(\Lambda(t+s) - \Lambda(t))$$

  mit der kumulierten Rate $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$.

- Ist N ein Poisson-Prozess und $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine von N unabhängige iid Folge, so heißt $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit $X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$ bewerteter (compound) Poisson-Prozess.

2 Grundbegriffe der allgemeinen Theorie

2.1 Definition und endlich-dimensionale Verteilungen

- Ein stochastischer Prozess (SP) ist das Quadrupel $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, \{X_t, t \in T\})$. T heißt Parameterraum, S Zustandsraum von X.
- Sei X SP und sei $\{t_1, \ldots, t_n, n \in \mathbb{N}\} \subset T$ beliebig. Dann heißen
$$P_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_n) = P(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n)$$
endlich-dimensionale Verteilungen des SP X.
- Für reelle ZV heißen
$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_n) \leq x_n)$$
endlich-dimensionale Verteilungsfunktionen des SP X.
- Die Menge aller endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen heißt die Familie der endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen.
- Endlich-dimensionale Verteilungsfunktionen (von SPen) erfüllen die folgenden Verträglichkeitsbedingungen (Konsistenzbedingungen):
  (a) Für jede Permutation $k_1, \ldots, k_n$ von $1, \ldots, n$ gilt:
  $F_{t_{k_1},\ldots,t_{k_n}}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)$.
  (b) Für alle $1 \leq k < n$ und $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ gilt:
  $F_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_k, \infty, \ldots, \infty)$.
- Eine endlich-dimensionale Verteilungsfamilie heißt konsistent: $\Leftrightarrow$ (a) und (b) gelten.
- Für jedes (feste) $\omega \in \Omega$ heißt die Funktion $X(\omega): \ T \to S \ , \ t \mapsto X_t(\omega)$ Pfad, Trajektorie oder Realisierung des stochastischen Prozesses X.
- Existenzsatz von Kolmogorov: Sei $\{F_{t_1,\ldots,t_n}\}$ (bzw. $\{P_{t_1,\ldots,t_n}\}$) ein konsistentes System von endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen (bzw. Verteilungen). Dann existieren ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und ein stochastischer Prozess $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, \{X_t, \ t \in T\})$ mit $F_{t_1,\ldots,t_n}$ als System von endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen, d.h.
$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n).$$

2.2 Äquivalenzbegriffe

- X und Y heißen verteilungsäquivalent (schwach äquivalent):
$\Leftrightarrow$ Die endlich–dimensionalen Verteilungen von X und Y sind gleich.
$\Leftrightarrow \forall \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$, $\{B_1, \ldots, B_n\} \subset \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$P(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n) = P(Y_{t_1} \in B_1, \ldots, Y_{t_n} \in B_n).$$
- X und Y heißen äquivalent (Y ist „Version“ von X): $\Leftrightarrow P(X_t = Y_t) = 1, \quad \forall \ t \in T$
- X und Y heißen ununterscheidbar:
$\Leftrightarrow$ X und Y haben mit Wahrscheinlichkeit 1 gleiche Pfade.
$\Leftrightarrow P\{X_t = Y_t \ldots \forall \ t \in T\} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$

- X, Y ununterscheidbar $\Rightarrow$ äquivalent $\Rightarrow$ verteilungsäquivalent.
- Falls T abzählbar: X, Y ununterscheidbar $\Leftrightarrow$ äquivalent.

2.3 Stetigkeitsbegriffe

- X heißt (fast sicher) pfadstetig:

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \quad P(\omega : \lim_{s\to t} X(s,\omega) = X(t,\omega) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+) = 1\\ &\Leftrightarrow \quad P(\lim_{s\to t} X(s) = X(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+) = 1\end{aligned}$$

- X heißt (fast sicher) stetig: $\Leftrightarrow P(\omega : \lim_{s\to t} X(s,\omega) = X(t,\omega)) = 1 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+$
- X heißt stochastisch stetig:

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \quad \lim_{s\to t} P(\omega : |X(s,\omega) - X(t,\omega)| > \epsilon) = 0, \quad \forall\, \epsilon > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+\\ &\Leftrightarrow \quad p - \lim_{s\to t} X(s) = X(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+\end{aligned}$$

- X, Y äquivalent und X, Y fast sicher pfad–rechtsstetig $\Rightarrow$ X, Y ununterscheidbar.

2.4 Stationarität

- Ein stochastischer Prozess X heißt streng stationär:

$$\Leftrightarrow \quad F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = F_{t_1+h,\ldots,t_n+h}(x_1,\ldots,x_n), \quad \forall\, n, t_1,\ldots,t_n, h.$$

- (Auto-)Kovarianzfunktion:

$$\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \mathrm{Cov}(X_h, X_0), \quad h \geq 0.$$

- Autokorrelationsfunktion:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\gamma(h)}{\sigma^2} \qquad h \geq 0.$$

- Ein stochastischer Prozess X heißt schwach stationär:

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}(X_t) = \mu, \qquad \mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \gamma(t-s)$$

3 Markov-Ketten

3.1 Grundlegende Eigenschaften

- Der stochastische Prozess $X = \{X_t,\ t \in \mathbb{N}_0\}$, S diskret, heißt Markov-Kette 1. Ordnung $:\Leftrightarrow$ $\forall\, t \in \mathbb{N}_0\,;\ j,\, i,\, i_{t-1}, \ldots,\, i_0 \in S$

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i,\, X_{t-1} = i_{t-1}, \ldots,\, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = j | X_t = i)$$

- $p_{ij}(t) = P(X_{t+1} = j | X_t = i)$ heißt (einschrittige) Übergangswahrscheinlichkeit (ÜW) von i nach j (zum Zeitpunkt t).

- Eine Markov-Kette heißt homogen, falls $p_{ij}(t) = p_{ij}$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ gilt.

- Für homogene MK heißt die Matrix $P = (p_{ij}), i, j \in S$ Übergangsmatrix.

- $p_i(0) := P(X_0 = i),\ i \in S$ heißt Anfangsverteilung, $p_i(t) := P(X_t = i),\ i \in S$ heißt Zustandswahrscheinlichkeit.

- $p_{ij}^{(t)} := P(X_{t+s} = j | X_s = i) = P(X_t = j | X_0 = i)$, $t \geq 1$ heißt t-schrittige Übergangswahrscheinlichkeit von i nach j.

- Für die t-schrittigen ÜW gelten die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen: $\forall t, s \in \mathbb{N}_0$

$$p_{ij}^{(t+s)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(s)} p_{kj}^{(t)}.$$

- Mit den t-schrittigen Übergangsmatrizen

$$(p_{ij}^{(t)}) = P^t \quad (t\text{-te Potenz von } P)$$

  lauten die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen in Matrixform

$$P^{t+s} = P^s P^t\ .$$

- Sei der Zeilenvektor $p(t) = (p_i(t))$ die Zustandsverteilung (für $t = 0$ die Anfangsverteilung). Dann gilt für alle $j \in S$:

$$p_j(t) = \sum_{i \in S} p_i(0) p_{ij}^{(t)}\ ,$$

  bzw. in Matrixschreibweise $p(t) = p(0)P^t$.

- Der stochastische Prozess $X = \{X_t,\ t \in \mathbb{N}_0\}$, S diskret, heißt Markov-Kette p-ter Ordnung $:\Leftrightarrow$ $\forall\, i_0,\, i_1, \ldots,\, i_{t+1},\, t \geq p + 1$

$$\begin{aligned} &P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, \ldots, X_{t-p+1} = i_{t-p+1}, \ldots, X_0 = i_0) \\ &\quad = P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, \ldots, X_{t-p+1} = i_{t-p+1}) \end{aligned}$$

3.2 Klassifizierung von Zuständen und Rückkehrverhalten

- Der Zustand j heißt von i aus erreichbar ($i \to j$): $\quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in \mathbb{N}_0$ mit $p_{ij}^{(t)} > 0$.
- Die Zustände i und j heißen wechselseitig erreichbar ($i \leftrightarrow j$): $\quad \Leftrightarrow \quad i \to j \quad$ und $\quad j \to i$.
- $i \leftrightarrow j$ ist eine Äquivalenzrelation, d.h. die Menge aller Zustände lässt sich zerlegen in Äquivalenzklassen wechselseitig erreichbarer Zustände.
- Klassifizierung nach Erreichbarkeit:
  Sei S die Menge aller Zustände, $C \subset S$ eine Teilmenge von S und $i \in S$ ein Zustand.
  1. C heißt abgeschlossen: $\Leftrightarrow$ Kein Zustand in $S \setminus C$ ist von C aus erreichbar.
  2. C heißt offen: $\Leftrightarrow$ C ist nicht abgeschlossen.
  3. Ein Zustand i heißt absorbierend: $\Leftrightarrow$ $\{i\}$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $p_{ii} = 1$
  4. Eine abgeschlossene Menge C heißt irreduzibel: $\Leftrightarrow$ Keine echte Teilmenge von C ist abgeschlossen, d.h. alle Zustände in C sind wechselseitig erreichbar.
  5. Eine Markov-Kette heißt irreduzibel $\Leftrightarrow$ S irreduzibel $\Leftrightarrow$ Alle Zustände sind wechselseitig erreichbar.
- Klassifizierung nach Rückkehrverhalten:
  Die MK sei für $t = 0$ in i. Es sei T_{ii} die Zeit bis zur ersten Rückkehr nach i und $E(T_{ii}) = \mu_{ii}$ die erwartete Rückkehrzeit.
  1. $i \in S$ heißt rekurrent: $\Leftrightarrow$ $P(T_{ii} < \infty | X_0 = i) = 1$.
  2. $i \in S$ heißt transient: $\Leftrightarrow$ $P(T_{ii} < \infty | X_0 = i) < 1$.
  3. Bei rekurrenten Zuständen kann man unterscheiden:
  $$\begin{aligned} i \text{ heißt positiv-rekurrent}: &\Leftrightarrow \mu_{ii} < \infty. \\ i \text{ heißt null-rekurrent}: &\Leftrightarrow \mu_{ii} = \infty. \end{aligned}$$
  4. i heißt periodisch mit Periode $d :\Leftrightarrow d \geq 2$ größte natürliche Zahl mit
  $$\sum_{n=1}^{\infty} P(T_{ii} = nd | X_0 = i) + P(T_{ii} = \infty | X_0 = i) = 1.$$
     i heißt aperiodisch für $d = 1$ (bzw. $d = \infty$).
  5. i heißt ergodisch: $\Leftrightarrow$ i ist positiv-rekurrent und aperiodisch.
- Rekurrenz, Transienz, Periodizität und Ergodizität sind Klasseneigenschaften.
- i rekurrent und $i \to j \Rightarrow i \leftrightarrow j$ und auch j rekurrent.
- i rekurrent $\Rightarrow$ Es existiert eine irreduzible Klasse $C(i)$ von rekurrenten Zuständen mit $i \in C(i)$.
- Kanonische Repräsentation:
  S lässt sich zerlegen in irreduzible Teilmengen C_1, C_2, ... und eine Restmenge T transienter Zustände. Seien nach evtl. Umnummerierung P_1, $P_2, \ldots, Q$ die dazugehörigen Teilmatrizen der Übergangsmatrix P, so gilt
  $$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ L_1 & L_2 & \cdots & \cdots & Q \end{pmatrix}$$

- Ist C eine irreduzible, endliche Klasse, so sind alle Zustände positiv-rekurrent.
- Ist C eine endliche Klasse, so gilt

$$\begin{aligned} C \text{ rekurrent} &\Leftrightarrow C \text{ abgeschlossen} \\ C \text{ transient} &\Leftrightarrow C \text{ offen} \end{aligned}$$

- Ist die Markov-Kette endlich, so existiert mindestens eine rekurrente Klasse.

3.3 Grenzverhalten homogener Markov-Ketten

- Ist j transient oder null-rekurrent, so gilt

$$\forall\, i \in S \quad \lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t)} = 0.$$

Ist j positiv-rekurrent und aperiodisch, so gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} p_{jj}^{(t)} &= \frac{1}{\mu_{jj}} \\ \lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t)} &= \lim_{t\to\infty} p_{jj}^{(t)} \quad \forall\, i \text{ mit } i \leftrightarrow j \\ \lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t)} &= f_{ij}\frac{1}{\mu_{jj}} =: l_{ij}^{(\infty)} \quad \forall\, i \in S \end{aligned}$$

Dabei ist f_{ij} die Wahrscheinlichkeit in endlicher Zeit von i nach j zu gelangen.

- In der kanonischen Repräsentation ergibt sich folgende Blockgestalt:

$$P^\infty = \begin{pmatrix} P_1^\infty & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & P_2^\infty & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ L_1^\infty & L_2^\infty & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- Grenzwertsatz: Für eine irreduzible, aperiodische Markov-Kette mit positiv rekurrenten Zuständen besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \pi_j &= \textstyle\sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}, \quad j \in S \\ \textstyle\sum_{j\in S} \pi_j &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{\begin{aligned} \pi &= \pi P \\ \pi\mathbf{1} &= 1 \end{aligned}\right.$$

mit Zeilenvektor $\pi = (\ldots, \pi_j, \ldots)$, $j \in S$ und $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)'$ eine eindeutige, strikt positive Lösung und es gilt

$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t)} = \frac{1}{\mu_{jj}},$$

sowie

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} p(0)P^t = p(0)P^\infty = \pi$$

für jede beliebige Anfangsverteilung $p(0)$.

3.4 Instationäre und inhomogene Markov-Ketten 1. Ordnung

- Modell für (binäre) Zeitreihendaten $\{Y_t,\, t \in \mathbb{N}_0\}$: $p_{ij}(t) = P(Y_{t+1} = j|Y_t = i), \quad i, j \in \{0, 1\}$
- Modell für Longitudinaldaten $\{Y_{nt}, t \in \mathbb{N}_0\}$, $n = 1, \ldots, N$ mit Kovariablen $\{z_{nt}, t \in \mathbb{N}_0\}$: $p_{ij,n}(t) = P(Y_{n,t+1} = j|Y_{nt} = i, z_{nt})$
- Separate Modellierung der Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p_{01,n}(t) = h(w'_{nt}\beta_0) \qquad p_{11,n}(t) = h(z'_{nt}\beta_1)$$

  h ist die Responsefunktion $h : \mathbb{R} \to [0, 1]$. Für $h(x) = \exp(x)/(1 + \exp(x))$ bzw. $h(x) = \phi(x)$ erhält man das Logit- bzw. das Probitmodell. Die Kovariablenvektoren w_{nt}, z_{nt} können identisch sein.

- Konditionale Modellierung: Simultanes, autoregressives Modell mit Y_t als Kovariable

  Beispiele:

$$\log\left(\frac{P(Y_{t+1} = 1|Y_t, w_t)}{P(Y_{t+1} = 0|Y_t, w_t)}\right) = w'_t\beta + Y_t\alpha \qquad \text{(additiv)}$$

$$\log\left(\frac{P(Y_{t+1} = 1|Y_t, w_t)}{P(Y_{t+1} = 0|Y_t, w_t)}\right) = w'_t\beta + Y_t w'_t\alpha \qquad \text{(mit Interaktion)}$$

3.5 Statistische Inferenz bei Markov-Ketten

- Allgemein: Daten $(x_0), x_1, \ldots, x_T$ werden aufgefasst als Realisierungen $x_0 = X_0(\omega), x_1 = X_1(\omega), \ldots, x_t = X_t(\omega), \ldots, x_T = X_T(\omega)$ eines stochastischen Prozesses $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$.
- Allgemeine Likelihood(funktion):

$$L(\theta|X) := f(x_0, \ldots, x_T|\theta)$$

  ist gemeinsame Dichte von $X_0, \ldots, X_T$, ausgewertet an $x_0, \ldots, x_T$, wird als Funktion vom unbekannten Parameter θ betrachtet.

- Likelihood bei Markov-Ketten:

$$L(\theta|X) = \prod_{t=1}^{T} f_t(x_t|x_{t-1}, \theta) f_0(x_0|\theta)$$

  Für homogene Markov-Ketten entfällt der Index t bei f_t.

- Bei Beobachtung mehrerer unabhängiger Pfade eines SP werden die Daten $x_{n0}, \ldots, x_{nT}$, $n = 1, \ldots, N$ aufgefasst als unabhängige Realisierungen $x_{n0} = X_0(\omega_n), \ldots, x_{nT} = X_T(\omega_n)$ des Prozesses $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$. Gemeinsame Dichte und die Likelihood ergeben sich als

$$L(\theta|X) = \prod_{n=1}^{N} f(x_{nT}, \ldots, x_{n0}|\theta) = \prod_{n=1}^{N}\prod_{t=1}^{T} f_t(x_{nt}|x_{n,t-1}, \theta) f_0(x_{n0}|\theta) \; .$$

- Sei X eine homogene Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum $S = \{1, \ldots, m\}$. Unbekannte Parameter: $P = (p_{ij})$ und $p(0)$

- Likelihood für einen beobachteten Pfad $X_0(\omega) = i_0, X_1(\omega) = i_1, \ldots, X_T(\omega) = i_T$:

$$L(p(0), P) = P\{X_0 = i_0, \ldots, X_T = i_T\} = p_i(0) p_{i_0 i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{T-1} i_T}$$

- Bedingte Likelihood: $L(P) = \prod_{i,j} p_{ij}^{n_{ij}}$

- ML-Schätzer: $\widehat{p}_{ij} = \dfrac{n_{ij}}{n_i}$ mit

  n_{ij} Anzahl der beobachteten Übergänge von i nach j
  n_i Anzahl der Übergänge weg von i

- Bei ergodischen Markov-Ketten gilt für $T \to \infty$

$$\widehat{p}_{ij} \overset{a}{\sim} N\left(p_{ij}, \frac{\widehat{p}_{ij}(1 - \widehat{p}_{ij})}{n_i}\right).$$

- Bei mehreren beobachteten Pfaden lassen sich auch Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t)$ für den inhomogenen Fall schätzen: $\widehat{p}_{ij}(t) = \dfrac{n_{ij}(t)}{n_i(t)}$ mit

  $n_{ij}(t)$ Anzahl der Übergänge von i nach j mit $X_t = i$ und $X_{t+1} = j$
  $n_i(t)$ Anzahl der Beobachtungen mit $X_t = i$

- Likelihood-Quotienten-Tests für homogene Markov-Ketten:
  Zum Test von Hypothesen H_0 versus H_1, z.B.

$$\begin{array}{ll} \mathrm{H}_0 : \{X_t\} \text{ ist i.i.d.}, & \mathrm{H}_1 : \{X_t\} \text{ ist Markov-Kette 1. Ordnung} \\ \mathrm{H}_0 : \{X_t\} \text{ ist Markov-Kette 1. Ordnung}, & \mathrm{H}_1 : \{X_t\} \text{ ist Markov-Kette 2. Ordnung} \end{array}$$

  kann der Likelihood-Quotienten-Test verwendet werden:

$$\begin{array}{ll} l(\hat{\theta}_1) & \text{maximierte Loglikelihood im } \mathrm{H}_1\text{-Modell} \\ l(\hat{\theta}_0) & \text{maximierte Loglikelihood im } \mathrm{H}_0\text{-Modell} \end{array}$$

  Unter H_0 gilt:

$$2(l(\hat{\theta}_1) - l(\hat{\theta}_0)) \overset{a}{\sim} \chi^2(r), \quad T \to \infty$$

  mit r=Differenz der Anzahl der geschätzten Parameter in H_0- und H_1-Modell.

3.6 Allgemeine Markov-Ketten

- Eine Markov-Kette ist ein stochastischer Prozess $\{X_t,\ t \in N_0\}$ mit Zustandsraum S, der die Markov-Eigenschaft

$$P(X_{t+1} \in A | X_t = x,\, X_{t-1} \in A_{t-1},\, \ldots,\, X_0 \in A_0) = P(X_{t+1} \in A | X_t = x)$$

  für beliebige $x \in S$ und $A,\, A_{t-1}, \ldots,\, A_0 \in \mathcal{S}$ erfüllt. Die Markov-Kette heißt homogen, falls die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht von t abhängen.

- $P(x,\, A) := P(X_{t+1} \in A | X_t = x) = P(X_1 \in A | X_0 = x)$ heißt Übergangskern der homogenen Markov-Kette.

- Eine Verteilung π^* auf $(S,\, \mathcal{S})$ mit Dichte π (bezüglich des dominierenden Maßes μ) heißt invariante Verteilung für den Übergangskern $P(x,\, A)$, wenn für alle $A \in \mathcal{S}$ gilt

$$\pi^*(A) = \int P(x,\, A)\pi(x)dx.$$

- Eine Markov-Kette mit invarianter Verteilung π^* heißt irreduzibel, wenn sie positive Wahrscheinlichkeiten besitzt, von einem beliebigen Startpunkt x_0 aus jede Menge A zu erreichen, für die $\pi^*(A) > 0$ gilt.

- Eine Markov-Kette heißt periodisch, wenn sie Teile des Zustandsraums nur in einer bestimmten Reihenfolge erreichen kann; andernfalls heißt die Markov-Kette aperiodisch.

- Grenzwertsatz: Sei $\{X_t,\ t \in \mathbb{N}_0\}$ eine irreduzible, aperiodische Markov-Kette mit Übergangskern P und invarianter Verteilung π^*. Dann ist π^* eindeutig bestimmt und es gilt

$$||P^t(x,\, .) - \pi^*|| \to 0 \ \text{ für } \ t \to \infty,$$

  wobei

$$||P^t(x,\, .) - \pi^*|| = 2 \sup_{A \in \mathcal{S}} \left| P^t(x,\, A) - \pi^*(A) \right|.$$

4 Diskrete Markov-Prozesse

4.1 Definition und elementare Eigenschaften

- Ein stochastischer Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit abzählbarem Zustandsraum heißt diskreter Markov-Prozess (MP), wenn $\forall n \geq 0$, $\forall t \geq s > s_n > \ldots > s_0 \geq 0$, $j, i, i_n, \ldots, i_0 \in S$ gilt

$$P(X(t) = j | X(s) = i, X(s_n) = i_n, \ldots, X(s_0) = i_0) = P(X(t) = j | X(s) = i).$$

- $p_{ij}(s,t) := P(X(t) = j | X(s) = i)$ heißt Übergangswahrscheinlichkeit(-sfunktion).
- $P(s,t) = (p_{ij}(s,t))$ heißt Übergangsmatrix.
- Ein Markov-Prozess heißt homogen (oder besitzt stationäre Übergangswahrscheinlichkeiten):

$$\Leftrightarrow P(X(t+s) = j | X(s) = i) = P(X(t) = j | X(0) = i) = p_{ij}(0,t) =: p_{ij}(t).$$

- Für die Übergangswahrscheinlichkeiten gilt

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \qquad \text{bzw.} \qquad P(s+t) = P(s)P(t)$$

- Gemeinsame Verteilung: $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \forall\ 0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \in \mathbb{R}_+, \quad i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$ gilt

$$P(X(t_n) = i_n, \ldots, X(t_1) = i_1 \mid X(t_0) = i_0) = p_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}).$$

- Voraussetzung (im Folgenden):

$$p_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

- Für $i, j \in S,\ i \neq j$, heißt

$$\lambda_{ij} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(X(t+h) = j | X(t) = i)}{h}$$

  Übergangsintensität bzw. -rate von i nach j. Für $i = j$ definieren wir

$$\lambda_{ii} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - p_{ii}(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h}.$$

  Zusammenfassend gilt für $i, j \in S$

$$\lambda_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}$$

  mit $0 \leq \lambda_{ij} < \infty$ für $i \neq j$, aber $\lambda_{ii} \leq 0$.

- $\Lambda = (\lambda_{ij})$ heißt Intensitätsmatrix.
- In $o(h)$–Schreibweise gilt also für $i \neq j$

$$\begin{aligned} p_{ij}(h) &= P(X(t+h) = j | X(t) = i) = \lambda_{ij} h + o(h), \\ p_{ii}(h) &= 1 + \lambda_{ii} h + o(h). \end{aligned}$$

4.2 Geburts- und Todesprozesse

- Ein stochastischer Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit Zustandsraum $S \subset \mathbb{N}_0$ heißt Geburtsprozess:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow p_{i,i+1}(h) &= \lambda_i h + o(h), \\
p_{i,i}(h) &= 1 - \lambda_i h + o(h), \qquad \lambda_i \geq 0 \qquad i \geq i_0 \\
p_{i,j}(h) &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq j \leq i-1 \\ o(h) & , \quad j \geq i+2 \end{cases}
\end{aligned}$$

- Dann gilt: Die Verweildauern $T_i,\ i \in \mathbb{N}$, sind unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter λ_i, d.h.

$$T_i \sim Exp(\lambda_i).$$

- Ein stochastischer Prozess $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ mit Zustandsraum $S \subset \mathbb{N}_0$ heißt Geburts- und Todesprozess: $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
p_{i,i+1}(h) &= \lambda_i h + o(h) & & i \geq 0 \\
p_{i,i-1}(h) &= \mu_i h + o(h) & & i \geq 1 \\
p_{ii}(h) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) & & i \geq 0 \\
p_{ij}(h) &= o(h) & & |i-j| \geq 2\,, \quad i,j \geq 0
\end{aligned}$$

mit
$$\begin{aligned}
\mu_0 &= 0 \\
\lambda_0 &\underset{(=)}{>} 0 \quad (> 0\,\text{„reflektierend“}, =\text{„absorbierend“}), \\
\mu_i\,, \lambda_i &\geq 0 \quad \text{für } i \geq 1
\end{aligned}$$

- Für die Intensitäten eines Geburts- und Todesprozesses gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_{i,i+1} &= \lambda_i \\
\lambda_{i,i-1} &= \mu_i \\
\lambda_{ij} &= 0 \text{ für } |i-j| \geq 2 \\
\lambda_{ii} &= -(\lambda_i + \mu_i)
\end{aligned}$$

4.3 Allgemeine Theorie

- Bezeichne
  S_n den Zeitpunkt der n-ten Zustandsänderung, $S_0 = 0$,
  $Y_n = X(S_n)$ den zum Zeitpunkt S_n angenommenen Zustand,
  $T_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ die Verweildauer in Y_n; $S_{n+1} = S_n + T_{n+1}$.

- Die Verweildauern $T_n,\ n \in \mathbb{N}$ sind exponentialverteilt mit Parameter λ_i, sodass gilt $T_n | Y_{n-1} = i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$. Für die Vorwärtsrekurrenzzeit $V(t)$ gilt

$$P(V(t) \leq s \mid X(t) = i) = 1 - e^{-\lambda_i s} \quad , s \geq 0,$$

  $V(t)$ ist also ebenfalls exponentialverteilt mit Parameter λ_i.

- Ein Zustand i heißt

$$\begin{aligned}
\text{absorbierend:} &\Leftrightarrow \lambda_i = 0, \\
\text{stabil:} &\Leftrightarrow 0 < \lambda_i < \infty, \\
\text{instabil:} &\Leftrightarrow \lambda_i = \infty.
\end{aligned}$$

- Sei X ein Markov-Prozess mit rechtsseitig stetigen Pfaden. Dann gilt $\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \forall\, j, i, \dots, i_0 \in S$, $\forall\, t, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \forall\, 0 < s_1 \dots < s_n$
  1. $P(Y_{n+1} = j, T_{n+1} > t \mid Y_n = i, \dots, Y_0 = i_0, S_n = s_n, \dots, s_0 = 0) = q_{ij} e^{-\lambda_i t}$
     mit $q_{ij} \geq 0,\ \sum_{j \in S} q_{ij} = 1, q_{ii} = \begin{cases} 0, & i \text{ stabil} \\ 1, & i \text{ absorbierend} \end{cases}$
  2. $\{Y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix $Q = (q_{ij})$
  3. $P(T_{n+1} > t \mid Y_n = i, Y_{n+1} = j) = P(T_{n+1} > t \mid Y_n = i) = e^{-\lambda_i t}$
  4. $P(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n \mid Y_n = i, \dots, Y_0 = i_0) = e^{-\lambda_{i_0} t_1} \dots e^{-\lambda_{i_{n-1}} t_n}$
- Ein Markov-Prozess heißt regulär, wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt:
  1. $p_{ij}(0) = \lim\limits_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$
  2. Pfade (mit Wahrscheinlichkeit 1) rechtsseitig stetig.
  3. $\sup_n S_n = +\infty$.
- Regularitätskriterien: Ein Markov-Prozess, der die Eigenschaften 1. und 2. erfüllt, ist regulär, falls eine der folgenden Eigenschaften gilt:
  1. S ist endlich.
  2. $\lambda_i \leq c$ für alle $i \in S$.
  3. Alle Zustände der eingebetteten Markov-Kette Y sind rekurrent.
  4. Die Markov-Kette Y verbleibt mit Wahrscheinlichkeit 0 in einer transienten Klasse.
- Ist X ein regulärer Markov-Prozess, dann sind die Übergangswahrscheinlichkeiten stetig differenzierbar und es gilt
  $$p'_{ij}(0) = \lambda_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i & , \quad i = j \\ \lambda_i q_{ij} & , \quad i \neq j \end{cases}$$
  $$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcll} P(X(h) = i | X(0) = i) & = & 1 - \lambda_i \cdot h + o(h) & i = j \\ P(X(h) = j | X(0) = i) & = & \lambda_i q_{ij} \cdot h + o(h) & i \neq j. \end{array}$$
- Für einen regulären Markov-Prozess X ist die Übergangsmatrix $P(t) = (p_{ij}(t))$ durch die Übergangsmatrix Q der eingebetteten Markov-Kette Y und die Intensitätsmatrix Λ eindeutig bestimmt. Die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t)$ sind Lösung von
  1. $p'_{ij}(t) = \sum\limits_{k \in S} \lambda_{ik} p_{kj}(t)$ bzw. $P'(t) = \Lambda P(t),\ P(0) = I$
     (Rückwärtsgleichungen von Kolmogorov),
  2. $p'_{ij}(t) = \sum\limits_{k \in S} p_{ik}(t) \lambda_{kj}$ bzw. $P'(t) = P(t)\Lambda,\ P(0) = I$
     (Vorwärtsgleichungen von Kolmogorov).
  3. Für endliches S ist die Lösung gegeben durch
     $$P(t) = e^{t\Lambda} = I + t\Lambda + \frac{(t\Lambda)^2}{2!} + \frac{(t\Lambda)^3}{3!} + \dots.$$
     Die Berechnung erfolgt mit Hilfe der Spektralzerlegung $\Lambda = U \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_m) U^{-1}$ mit den Eigenwerten $d_1, \dots, d_m$ und der Matrix U der Eigenvektoren. Dann gilt
     $$P(t) = U \operatorname{diag}(e^{d_1 t}, \dots, e^{d_m t}) U^{-1}.$$

- Die Zustände eines Markov-Prozesses werden anhand der eingebetteten Markov-Kette klassifiziert (Rekurrenz, Erreichbarkeit, Periodizität, etc.).
- Für einen regulären, irreduziblen und positiv-rekurrenten Markov-Prozess X gilt
    1. $\lim_{t\to\infty} P(X(t)=j) = \pi_j$ existiert $\forall\ j$ und ist von der Anfangsverteilung unabhängig.
    2. Die Grenzverteilung π lässt sich berechnen über
        (a) $\pi_j = \dfrac{\eta_j}{\sum_i \eta_i}$ mit $\eta\Lambda = 0$ bzw.
        (b) $\pi_j = \dfrac{\nu_j/\lambda_j}{\sum_i \nu_i/\lambda_i}$ mit $\nu = \nu Q$.
    3. $\lim_{t\to\infty} P(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$
    4. $\pi = (..., \pi_j, ...)$ ist strikt positiv.
    5. π ist die einzige stationäre Verteilung von X, d.h. es gilt $\pi = \pi \cdot P(t) \quad \forall\ t \geq 0$.

4.4 Statistische Inferenz bei Markov-Prozessen

- Ziel: Likelihood–basierte Inferenz für $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}$ bzw. $Q = \{q_{ij}\}$ und $\lambda = \{\lambda_i\}$
- Situation 1: Vollständige Kenntnis über einen oder mehrere Pfade
    - Likelihood:

$$L(\lambda_{ij}|Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \ldots, Y_{n-1} = i_{n-1}, Y_n = i_n, T_1 = t_1, \ldots, T_n = t_n) =$$
$$= p_{i_0}(0) \prod_{i\in S} \exp(-\lambda_i\gamma_i) \prod_{j\in S, j\neq i} (q_{ij}\lambda_i)^{n_{ij}}$$

    mit γ_i als gesamte Verweildauer in i und n_{ij} als Anzahl der Übergänge von i nach j

    - ML-Schätzer:

$$\hat{\lambda}_{ij} = \frac{n_{ij}}{\gamma_i} \qquad \hat{\lambda}_i = \frac{n_i}{\gamma_i} \qquad \hat{q}_{ij} = \frac{\hat{\lambda}_{ij}}{\hat{\lambda}_i} = \frac{n_{ij}}{n_i}$$

    mit n_i als Anzahl der Übergänge weg von i, d.h. $n_i = \sum_j n_{ij}$

- Situation 2: Keine vollständige Kenntnis über die Pfade, d.h. Beobachtungen nur zu den Zeitpunkten $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Dann lautet die Likelihood:

$$L(\lambda_{ij}|X(t_1) = i_1, \ldots, X(t_n) = i_n) = p_{i_1}(0)p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1}i_n}(t_n - t_{n-1})$$

5 Erneuerungs- und Semi-Markov-Prozesse

5.1 Erneuerungsprozesse

- Sei $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge unabhängiger, nichtnegativer Zufallsvariablen mit gleicher Verteilungsfunktion F, für die $F(0) < 1$ gilt. Dann heißt die Folge $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ mit

$$S_0 := 0, \quad S_{n+1} = S_n + T_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

  Erneuerungsprozess (EP). Sei

$$N(t) = \max_{n \in \mathbb{N}_0} \{n : S_n \leq t\}$$

  die Anzahl von Erneuerungen im Intervall $[0, t]$. Dann heißt $N = \{N(t), t \geq 0\}$ Erneuerungszählprozess bzw. Erneuerungsprozess.

- Ein Erneuerungsprozess heißt rekurrent, wenn gilt: $\lim_{t \to \infty} F(t) = 1$.

- Sei T eine stetige, nichtnegative Zufallsvariable mit Dichte $f(t)$ und Verteilungsfunktion $F(t)$. Dann bezeichnet

  $S(t) = 1 - F(t)$ die Survivorfunktion,

  $\lambda(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{P(t \leq T \leq t + h | T \geq t)}{h}$ die Hazardrate und

  $\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(u) du$ die kumulierte Hazardrate.

- Es gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{S(t)} \\ S(t) &= \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) d(u)\right) = \exp(-\Lambda(t)) \\ f(t) &= \lambda(t) \cdot S(t) = \lambda(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) du\right) \end{aligned}$$

- Beispiel Weibullverteilung, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \text{Dichte:} \quad f(t) &= \lambda\alpha(\lambda t)^{\alpha-1} \exp\left(-(\lambda t)^\alpha\right) \\ \text{Survivorfunktion:} \quad S(t) &= \exp\left(-(\lambda t)^\alpha\right) \\ \text{Hazardrate:} \quad \lambda(t) &= \lambda\alpha(\lambda t)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

- Verteilungsfunktion $F_n(t)$ von S_n:

$$F_n(t) = P(S_n \leq t) = \int_{[0,t]} F_{n-1}(t - x) dF(x) = F_{n-1} \otimes F(t) \quad t \geq 0.$$

  mit $F_1(t) := F(t)$

- Dichte $f_n(t)$ von $F_n(t)$:

$$f_n(t) = \int_0^t f_{n-1}(t-x)f(x)dx, \quad f_1(t) := f(t)$$

- Verteilung von $N(t)$: $P(N(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t), \quad n = 0, 1, \ldots \qquad F_0(t) \equiv 1.$
- Erneuerungsfunktion $R(t)$: $R(t) = \mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$.
- Erneuerungsdichte $r(t)$: $r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$.
- Grenzwertsätze: Für einen rekurrenten Erneuerungsprozess mit stetigen T_n und $\mu = \mathrm{E}(T_n)$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(T_n) < \infty$ gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} &= \frac{1}{\mu} \\
\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} &= \frac{1}{\mu} \text{ (elementares Erneuerungstheorem)}, \\
\lim_{t\to\infty} \left[R(t) - \frac{t}{\mu}\right] &= \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2} \text{ falls } \sigma^2 < \infty \text{ und } S \text{ aperiodisch}, \\
\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\frac{\sigma}{\mu}\sqrt{\frac{t}{\mu}}} \le x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.
\end{aligned}$$

5.2 Semi-Markov-Prozesse

- Sei $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit abzählbarem Zustandsraum S, $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Folge nichtnegativer Zufallsvariablen mit $0 = S_0 \le S_1 \le S_2 \le \ldots$ Der stochastische Prozess $(Y, S) = \{(Y_n, S_n), n \in \mathbb{N}_0\}$ heißt Markov-Erneuerungsprozess (MEP) :⇔ $\forall\ t, s, s_{n-1}, \ldots \in \mathbb{R}_+, \forall\ j, i_n, \ldots, i_0$

$$\begin{aligned}
P(Y_{n+1} = j, T_{n+1} \le t | Y_n = i, Y_{n-1}, \ldots, Y_0 = i_0, S_n = s, S_{n-1} = s_{n-1}, \ldots)& \\
= P(Y_{n+1} = j, T_{n+1} \le t | Y_n = i).&
\end{aligned}$$

  Ist (Y, S) ein Markov-Erneuerungsprozess, so heißt $X = \{X(t), t \ge 0\}$ der zu (Y, S) gehörige Semi-Markov-Prozess: ⇔ (SMP)

$$X(t) = Y_n \quad \text{für } S_n \le t \le S_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Ein Semi-Markov-Prozess heißt homogen, falls

$$P(Y_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \le t | Y_n = i) = P(Y_1 = j, S_1 \le t | Y_0 = i) =: Q_{ij}(t)$$

  gilt. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $Q_{ij}(t)$ heißen Semi-Markov-Übergangswahrscheinlichkeiten. $Q(t) = (Q_{ij}(t))$ heißt Semi-Markov-Übergangsmatrix.

- Charakterisierung über Hazardraten:

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{P(Y_{n+1} = j, t \le T_{n+1} \le t + h \mid Y_n = i, T_{n+1} \ge t)}{h} = \frac{q_{ij}(t)}{1 - Q_i(t)}$$

  mit Dichte $q_{ij}(t)$ zu $Q_{ij}(t)$, d.h. $q_{ij}(t) = \frac{\partial Q_{ij}(t)}{\partial t}$

- Für die Verweildauer in i gilt

$$Q_i(t) := \sum_{j\in S} Q_{ij}(t) = P(T_{n+1} \leq t | Y_n = i) = P(S_1 \leq t | Y_0 = i)$$

bzw. in der Charakterisierung über Hazardraten

$$\lambda_i(t) = \frac{q_i(t)}{1 - Q_i(t)},$$

wobei $q_i(t)$ die Dichte zu $Q_i(t)$ bezeichnet und $Q_i(0) < 1$ sowie $\lim_{t\to\infty} Q_i(t) = 1$ (gilt weiter im Folgenden).

- $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ bildet eine homogene Markov-Kette mit Übergangsmatrix

$$Q = (q_{ij}), \qquad q_{ij} = \lim_{t\to\infty} Q_{ij}(t) = P(Y_{n+1} = j | Y_n = i).$$

- Für die bedingte Verteilung der Verweildauer T_{n+1} gegeben $Y_n = i$ und $Y_{n+1} = j$ gilt

$$G_{ij}(t) = P(T_{n+1} \leq t | Y_n = i, Y_{n+1} = j) = \frac{Q_{ij}(t)}{q_{ij}}.$$

- Rekurrenzeigenschaften und Irreduzibilität eines Semi-Markov-Prozesses leiten sich aus den entsprechenden Eigenschaften der Markov-Kette Y ab.

- Der SMP heißt aperiodisch, wenn für alle i die Zwischenzeiten T_{ii} zwischen aufeinanderfolgenden Besuchen in i nicht gitterförmig sind, d.h. es gibt kein $d \geq 0$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} P(T_{ii} = nd) = 1$.

- Grenzwertsatz: Der Semi-Markov-Prozess sei aperiodisch, irreduzibel und positiv-rekurrent. Dann gilt für die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t) = P(X(t) = j | Y_0 = i)$ und die Zustandswahrscheinlichkeit $p_j(t) = P(X(t) = j)$

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \frac{\nu_j \mu_j}{\sum_{i\in S} \nu_i \mu_i},$$

mit strikt positiver stationärer Verteilung ν der eingebetteten Markov-Kette Y, d.h.

$$\nu = \nu Q, \quad \nu > 0, \qquad \text{sowie} \qquad \mu_i = \int_0^\infty t q_i(t) dt = \int_0^\infty (1 - Q_i(t)) dt.$$

6 Martingale in stetiger Zeit

- Die Menge von σ-Algebren $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ heißt Filtration, falls gilt $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, für $0 \leq s \leq t$. $X = \{X_t, t \geq 0\}$ heißt adaptiert zur Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, falls gilt $\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t, \quad t \geq 0$.

- $X = \{X_t, t \geq 0\}$ heißt Martingal bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ $:\Leftrightarrow$

  1. $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ für $t \geq 0$.
  2. X ist adaptiert zur Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.
  3. $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ für $0 \leq s < t$.

- X heißt Sub- bzw. Supermartingal, wenn anstelle von 3. die Eigenschaften $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$ bzw. $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$ gelten.

- Sei $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ eine Filtration. Die σ–Algebra $\mathcal{F}_t^+ = \sigma\left(\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s\right)$ erlaubt einen „infinitesimalen" Blick in die Zukunft, und $\mathcal{F}_t^- = \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right)$ umfasst alle Ereignisse bis unmittelbar vor t.

- Übliche Bedingungen an eine Filtration:

  1. $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ ist rechtsstetig $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+$ für alle t
  2. $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ ist vollständig $:\Leftrightarrow$ Für $C \subset B \in \mathcal{F}$ mit $P(B) = 0$ folgt $C \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ (und $P(C) = 0$).

  Im Weiteren werden die üblichen Bedingungen vorausgesetzt.

- Ein SP $A = \{A_t, t \geq 0\}$ heißt vorhersagbar (bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$) $:\Leftrightarrow$ für alle $t \geq 0$ gilt

  1. A_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar, und
  2. A_t ist $\mathcal{F}_t^-$-messbar.

  Hinreichend für die Vorhersagbarkeit ist, dass A linksseitig stetige Pfade besitzt.

- Doob-Meyer-Zerlegung: Sei $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ ein rechtsstetiges, nichtnegatives Submartingal oder ein beschränktes Submartingal, und $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ eine Filtration, die die „üblichen Bedingungen" erfüllt. Dann existieren ein vorhersagbarer Prozess $\{A_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ und ein Martingal $\{M_t, t \in \mathbb{R}_+\}$, so dass
$$N_t = A_t + M_t$$
  für alle t gilt. Der Prozess $A = \{A_t\}$ heißt Kompensator von N.

7 Punkt- und Zählprozesse

7.1 Definition und Eigenschaften

- Sei $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ eine Filtration mit den „üblichen“ Bedingungen. Die Folge $\{(S_n, Y_n), n \in \mathbb{N}\}$ heißt markierter Punktprozess zu $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ $:\Leftrightarrow$

  1. $S_n \geq 0$ ist $\mathcal{F}_t$-Stoppzeit
  2. Y_n ist eine $\mathcal{F}_{S_n}$-messbare Zufallsvariable mit Werten in der diskreten Menge S
  3. $S_n < S_{n+1}$ auf $\{S_n < \infty\}$,
     $S_n = S_{n+1} = \ldots$ auf $\{S_n = \infty\}$

- Es gilt:

  (a) Y_n ist $\mathcal{F}_{S_n}$-messbar.
  (b) S_n ist die Auftrittszeit des n–ten Ereignisses und $S_n < S_{n+1}$.
  (c) Y_n heißt Marke bzw. Typ des n–ten Ereignisses.
  (d) $T_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ heißt Wartezeit, Zwischenauftrittszeit. Setze dabei $S_0 := 0$.
  (e) Der Prozess heißt explodierend für $\omega \in \Omega :\Leftrightarrow S_\infty(\omega) = \lim_{n\to\infty} S_n(\omega) < \infty$.
  Der Prozess heißt auslöschend für $\omega \in \Omega :\Leftrightarrow S_n(\omega) = \infty$ für ein $n \geq 1$.

- Für jedes $h \in S,\ t \in \mathbb{R}_+$ sei

  $$N_h(t) = \sum_{n\geq 1} I(S_n \leq t) I\{Y_n = h\}$$

  die Anzahl der bis t eingetretenen Ereignisse vom Typ h. Dann heißt

  $$N(t) = \{N_1(t), \ldots, N_h(t), \ldots, N_k(t)\}$$

  (für $k > 1$: multivariater) Zählprozess. Die Gesamtzahl aller Ereignisse bis t,

  $$\bar{N}(t) = \sum_{h=1}^{k} N_h(t)$$

  ist ein univariater Zählprozess.

- Doob-Meyer-Zerlegung von Zählprozessen: Sei $\{N_h(t),\ h = 1, \ldots, k\}$ ein multivariater Zählprozess mit $\mathbb{E}(N_h(t) < \infty)\ \forall\ t \geq 0$.

  1. Dann existiert ein (f.s.) eindeutiger, vorhersagbarer Kompensator-Prozess $\{A_h(t),\ t \geq 0\}$, $A_h(0) = 0$, mit wachsenden und rechtsstetigen Pfaden.
  2. Der Prozess $M_h(t) = N_h(t) - A_h(t)$ ist ein Martingal.
  3. Die Zerlegung $N_h(t) = A_h(t) + M_h(t)$ heißt Doob-Meyer-Zerlegung des Zählprozesses.

- Falls es einen vorhersagbaren (insbesondere linksstetigen), nichtnegativen Prozess $\alpha_h(t)$ mit

  $$A_h(t) = \int_0^t \alpha_h(s) ds$$

  gibt, so heißt dieser Intensitätsprozess zu $N_h(t)$. $A_h(t)$ heißt auch kumulierter Intensitätsprozess.

  Im Weiteren Voraussetzung der Existenz eines Intensitätsprozesses zu $N_h(t)$.

- Theorem von Aalen: Der Zählprozess $\{N_h(t),\ t \geq 0\}$ besitze einen Intensitätsprozess $\{\alpha_h(t)\}$ mit linksseitig stetigen Pfaden und rechtsseitigen Grenzwerten. Zusätzlich existiere eine positive Zufallsvariable L mit $\mathbb{E}(L) < \infty$ und $\alpha_h(t) \leq L$ für alle $t \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}(N_h(t+\Delta t) - N_h(t) | \mathcal{F}_t) &= \alpha_h(t_+).\\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_h(t+\Delta t) - N_h(t) \geq 1 | \mathcal{F}_t) &= \alpha_h(t_+).\end{aligned}$$

  Unter zusätzlichen Bedingungen gilt sogar

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_h(t+\Delta t) - N_h(t) = 1 | \mathcal{F}_t) = \alpha_h(t_+).$$

  Ist $\alpha_h(t)$ sogar stetig in t, dann gilt $\alpha_h(t_+) = \alpha_h(t)$.

- Für jedes $n \geq 0$ existiert ein $\mathcal{F}^N_{S_n} = \sigma(S_1, Y_1, \ldots, S_n, Y_n)$ messbarer Prozess

$$\{\alpha_h^{(n)}(t),\ t \geq 0;\ h = 1, \ldots, k\}$$

  mit

$$\alpha_h(t) = \alpha_h^{(n)}(t) \text{ für } S_n < t \leq S_{n+1} \text{ (falls } S_n < \infty)$$

  und

$$\alpha^{(n)}_{Y_{n+1}} > 0 \ \text{ f.s. auf } \{S_{n+1} < \infty\}.$$

- Übergangswahrscheinlichkeiten für (S_n, Y_n):

$$\begin{aligned}Q^{(n)}(t,h) &:= P(T_{n+1} \leq t, Y_{n+1} = h \mid \mathcal{F}^N_{S_n})\\ Q^{(n)}(t) &:= \sum_{h \in S} Q^{(n)}(t,h) = P(T_{n+1} \leq t \mid \mathcal{F}^N_{S_n})\\ P^{(n)}(t,h) &:= P(Y_{n+1} = h \mid \mathcal{F}^N_{S_n}, S_{n+1} = t)\end{aligned}$$

  Diese Übergangswahrscheinlichkeiten lassen sich mittels des Intensitätsprozesses berechnen:

$$\begin{aligned}Q^{(n)}(t,h) &= \int_0^t \alpha_h^{(n)}(S_n + s) \exp\left\{ - \int_{S_n}^{S_n+s} \alpha^{(n)}(u) du \right\} ds\\ Q^{(n)}(t) &= 1 - \exp\left\{ - \int_{S_n}^{S_n+t} \alpha^{(n)}(s) ds \right\}\\ P^{(n)}(t,h) &= \frac{\alpha_h^{(n)}(t)}{\alpha^{(n)}(t)} \quad \text{ mit } \alpha^{(n)}(t) = \sum_{h \in S} \alpha_h^{(n)}(t).\end{aligned}$$

- Es gilt:
  (a) $P(\ldots | \mathcal{F}^N_{S_n}) = P(\ldots | (S_1, Y_1), \ldots, (S_n, Y_n))$
  (b) Die (bedingte) Verteilungsfunktion $Q^n(t,h)$ besitzt eine Dichte $q^n(t,h)$, d.h.

$$Q^{(n)}(t,h) = \int_0^t q^{(n)}(s,h) ds,$$

  so dass

$$\alpha_h^{(n)}(t) = \frac{q^{(n)}(t - S_n, h)}{1 - Q^{(n)}(t - S_n)}$$

  auf $\{S_n < t \leq S_{n+1}\}$.
  (c) Für den Kompensator–Prozess gilt:

$$A_h(t) = A_h(S_n) + \int_0^{t - S_n} \frac{q^{(n)}(s,h)}{1 - Q^{(n)}(s)} ds \qquad \text{auf } \{S_n < t \leq S_{n+1}\}.$$

7.2 Allgemeines Zählprozess-Modell

- Seien

$N_{hi}(t)$	Zählprozess für die Anzahl von Typ-h-Ereignissen für Individuum i in $[0,t]$,
$\{z_i(t),\ t \geq 0\}$	vorhersagbare Kovariablenprozesse,
$\lambda_{hi}(t) = \lambda_h(t; z_i(t))$	Hazardraten für die Beobachtung von Typ-h-Ereignissen,
$I_{hi}(t)$	vorhersagbare Indikatorprozesse mit $I_{hi}(t) = 1$ genau dann, wenn Individuum i unter Risiko für ein Typ-h-Ereignis bis unmittelbar vor t steht.

  Dann wird $\{N_{hi}(t),\ t \geq 0\}$ durch den Intensitätsprozess

$$\alpha_{hi}(t) = \lambda_h(t; z_i(t)) I_{hi}(t),$$

  $h = 1, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, n$ spezifiziert.

- Ist $\{C_i(t), t \geq 0\}$ ein vorhersagbarer Zensierungsprozess mit

$$C_i(t) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad i \text{ ist zur Zeit } t \text{ unter Beobachtung},$$

  dann ist in der Definition $I_{hi}(t)$ durch

$$\widetilde{I}_{hi}(t) = I_{hi}(t) C_i(t)$$

  zu ersetzen.