

### Aufgabe 1

Ein Sportfischer fährt am Wochenende zum Angeln an einen kleinen Weiher. In diesem Weiher befinden sich am frühen Morgen genau 10 Fische. Wenn noch  $n$  Fische im Weiher schwimmen, so ist die Zeit bis zum Anbeißen des nächsten Fisches exponentialverteilt mit dem Parameter  $n \cdot \mu$ , wobei  $\mu = 0.2$  und  $n = 1, \dots, 10$  gilt.

- Welchem Prozess folgt die Anzahl der Fische im Weiher und welchem im Fangeimer?
- Geben Sie für diesen Prozess die Intensitätsmatrix  $\Lambda$  und die Übergangsmatrix  $Q$  der eingebetteten Markov-Kette an.
- Wie viel Zeit verstreicht im Mittel, bis der Sportangler genau 5 Fische bzw. alle 10 Fische gefangen hat?

### Aufgabe 2

Auf einem Radiosender läuft rund um die Uhr Musik  $M$ , die gelegentlich von Werbeblöcken  $W$  oder Nachrichten  $N$  unterbrochen werden. Betrachten Sie den (homogenen) stochastischen Prozess  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  des Radioprogramms mit den Zuständen  $M$ ,  $W$  und  $N$  in stetiger Zeit. Die Verweildauern in den einzelnen Zuständen seien exponentialverteilt mit den Parametern  $\lambda_M$ ,  $\lambda_W$  und  $\lambda_N$ .

- Um welche Art von Prozess handelt es sich bei  $X$ ?
- Unter welchen Voraussetzungen an die Parameter  $\lambda_M$ ,  $\lambda_W$  und  $\lambda_N$  besitzt der Prozess  $X$  eine stationäre Verteilung?

Der Radiosender versucht sein Programm Hörer-freundlich zu gestalten. Manchmal kommt vor einer Nachrichtensendung noch Werbung, niemals aber kommt ein Werbeblock im Anschluss an Nachrichten.

- Zeichnen Sie den Übergangsgraphen der eingebetteten Markov-Kette  $Y = \{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$  mit den drei Zuständen  $M$ ,  $W$  und  $N$ .
- Stellen Sie die Übergangsmatrix  $Q$  der eingebetteten Markov-Kette  $Y$  auf, wenn  $p_{MW} = 0.9$  und  $p_{WN} = 0.5$  gilt. Berechnen Sie außerdem die stationäre Verteilung  $\nu = (\nu_M, \nu_W, \nu_N)$  von  $Y$ .

Um den Sender zu finanzieren, muss ein Viertel der Sendezeit mit Werbung belegt werden, gleichzeitig sollen die Musikeinspielungen 70% der Sendezeit einnehmen. Die Länge der Musiksequenzen legt der Sender auf durchschnittlich 20 Minuten fest.

- Geben Sie die entsprechende stationäre Verteilung  $\pi = (\pi_M, \pi_W, \pi_N)$  von  $X$  an. Wie müssen die Parameter  $\lambda_W$  und  $\lambda_N$  gewählt werden?
- Ein Zuschauer schaltet das Radio ein, als gerade Werbung läuft. Wie lange wird es voraussichtlich dauern, bis es im regulären Programm weitergeht?