Aufgabe 1

Gegeben sei eine homogene Markov-Kette 1. Ordnung $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ mit Zustandsraum $S = \{A, B, C\}$ und der folgenden Übergangsmatrix:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Vergewissern Sie sich, dass X ergodisch ist.

(b) Berechnen Sie die stationäre Verteilung von X und interpretieren Sie diese.

(c) Berechnen Sie die erwarteten Rückkehrzeiten für alle drei Zustände.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass man die stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi}$ einer ergodischen Markov-Kette 1. Ordnung mit Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}$ über die folgende Formel berechnen kann:

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P} + \boldsymbol{U})^{-1}$$

wobei $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$, $\boldsymbol{I} = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$ die Einheitsmatrix ist und $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

Schreiben Sie auf der Grundlage dieser Eigenschaft in R eine Funktion, die für eine gegebene Übergangsmatrix die stationäre Verteilung berechnet. Testen Sie Ihre Funktion mit der Übergangsmatrix aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3

Unter welchen Voraussetzungen ist eine homogene Markov-Kette 1. Ordnung ein streng stationärer Stochastischer Prozess?