Aufgabe 1

Gegeben sei eine homogene Markov-Kette 1. Ordnung $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ mit Zustandsraum $S = \{A, B\}$ und der folgenden Übergangsmatrix:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Startverteilung sei gegeben durch $P(X_0 = A) = 0.2$ und $P(X_0 = B) = 0.8$.
Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(a) $P(X_3 = A)$

(b) $P(X_3 = A | X_0 = A)$

(c) $P(X_3 = A | X_1 = B, X_0 = A)$

(d) $P(X_3 = A | X_2 = B, X_1 = B, X_0 = A)$

(e) $P(X_6 = A | X_3 = A)$

(f) $P(X_3 = A | X_6 = A)$

Aufgabe 2

Schreiben Sie in R eine Funktion, die eine Markov-Kette 1. Ordnung der Länge n mit Zustandsraum $S = \{1, 2, \ldots, k\}$ in Abhängigkeit von der Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}$ simuliert und den zugehörigen Pfad visualisiert. Verwenden Sie als Startverteilung die Gleichverteilung auf S. Testen Sie Ihre Funktion für verschiedene Übergangsmatrizen $\boldsymbol{P}$ sowie für Potenzen der Übergangsmatrizen, d.h. $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{P}^5$ und $\boldsymbol{P}^{10}$.

Aufgabe 3

Gegeben sei eine homogene Markov-Kette 1. Ordnung $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ mit Zustandsraum
$S = \{A, B, C, D\}$ und der folgenden Übergangsmatrix:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Zeichnen Sie den zugehörigen Markov-Graphen.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in genau drei Schritten vom Zustand C in den Zustand A zu gelangen?

(c) **Klassifizierung nach Erreichbarkeit**
   (i) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von X.
   (ii) Teilen Sie diese in abgeschlossene, offene und irreduzible Klassen ein.
   (iii) Gibt es absorbierende Zustände?

(d) **Klassifizierung nach Rückkehrverhalten**
   (i) Welche Zustände von X sind rekurrent?
   (ii) Welche Zustände von X sind transient?
   (iii) Welche Zustände von X sind periodisch?

(e) Bringen Sie $\boldsymbol{P}$ in die kanonische Form.

Die folgende Aufgabe ist hauptsächlich zum Selbststudium gedacht.

Aufgabe 4

Der Prozess, der zu einer Einweisung einer Person in ein Krankenhaus führt, kann durch eine Markov-Kette 1. Ordnung mit der folgenden Übergangsmatrix für die Zustände $S_0, \ldots, S_4$ beschrieben werden:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & 0 & p_{04} \\ 0 & p_{11} & 0 & p_{13} & p_{14} \\ 0 & 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} S_0 \text{ gesund} \\ S_1 \text{ leichte Erkrankung, nicht im Krankenhaus} \\ S_2 \text{ schwere Erkrankung, im Krankenhaus} \\ S_3 \text{ krank, im Krankenhaus} \\ S_4 \text{ tot} \end{array}$$

(a) Zeichnen Sie den zur Übergangsmatrix gehörenden Markov-Graphen.

(b) Interpretieren Sie die Vorgaben für $p_{03} = 0$, $p_{12} = 0$, $p_{21} = 0$, $p_{33} = 1$ und $p_{34} = 0$.

(c) Welche Zustände sind offen, welche abgeschlossen?

(d) Geben Sie die Klasseneinteilung für die Markov-Kette an und bringen Sie die Übergangsmatrix in die kanonische Form.

(e) Welche Zustände sind absorbierend?

(f) Ist die Markov-Kette irreduzibel?