Aufgabe 1

Gegeben sei ein Poisson-Prozess $\{N(t), t \geq 0\}$. Zeigen Sie, dass dafür die Konsistenzbedingungen (Vgl. Skript S. 29) gelten. Was bedeutet die Konsistenzbedingung (b) anschaulich?

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die bedingte Verteilung der Ankunftszeit $S_1 \,|N(t) = 1$ bei einem homogenen Poisson-Prozess einer Gleichverteilung auf $[0, t]$ entspricht.

Hinweis: Bestimmen Sie dazu $P(S_1 \leq s \,|N(t) = 1)$, $s < t$.

Aufgabe 3

Gegeben seien unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen Z_t, $t \in \mathbb{N}_0$, mit $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ und $\mathrm{Var}(Z_t) = 1$. Der stochastische Prozess $\big\{X_t, t \in \mathbb{N}\big\}$ sei wie folgt definiert:

$$X_t = \frac{1}{2}(Z_t - Z_{t-1})$$

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X_t)$, $\mathrm{Var}(X_t)$ und $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1})$.

(b) Berechnen Sie Kovarianz- und Korrelationsfunktion von X_t und zeigen Sie damit, dass X_t schwach stationär ist.

(c) Ist X_t auch streng stationär? Begründen Sie Ihre Antwort.