Aufgabe 1

Schreiben Sie in R eine Funktion, welche die Pfade des homogenen Poisson-Prozesses für gegebene Intensitäten λ simuliert und visualisiert.

Hinweis: Benutzen Sie dabei die Eigenschaft aus Satz 1.3 im Skript.

Aufgabe 2

Nehmen Sie an, dass die Anzahl der Fische, die ein Angler aus einem See mit großem Fischbestand fischt, einem homogenen Poisson-Prozess folgt, wobei zwei gefangene Fische pro Stunde zu erwarten sind.

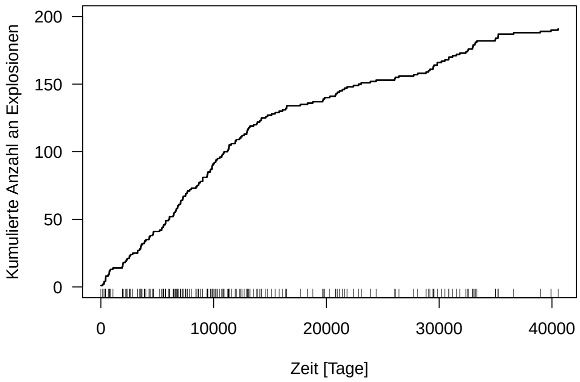
(a) Wie lange muss der Angler im Mittel warten, bis er 8 Fische gefangen hat?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Angler an einem bestimmten Tag zwischen 8 und 12 Uhr mehr als zwei Fische fängt?

(c) Wie lange muss der Angler warten, bis er mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit mindestens einen Fisch gefangen hat?

Aufgabe 3

Zwischen dem 15. März 1851 und dem 22. März 1962 ($t = 40550$ Tage) ereigneten sich in Großbritannien insgesamt $N(t) = 191$ Explosionen im Kohlebergbau, wobei mindestens 10 Personen tödlich verunglückten. Auf der Homepage finden Sie den Datensatz *coal.dat* mit den genauen Explosionszeitpunkten (in Tagen). Die folgende Abbildung bietet einen ersten Überblick über die Daten:



Aus statistischer Sicht lässt sich die vorliegende Situation als Poisson-Prozess auffassen.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}_{\text{ML}}$ unter Annahme eines homogenen Poisson-Prozesses.

(b) Zeichnen Sie in R ein Histogramm der Verteilung der Zwischenzeiten und zeichnen Sie zusätzlich auch die Dichte der Exponentialverteilung mit Rate $\hat{\lambda}_{\text{ML}}$ ein. Erscheint Ihnen die Annahme eines homogenen Poisson-Prozesses gerechtfertigt?

(c) Anstelle einer visuellen Überprüfung soll jetzt auch ein statistischer Test durchgeführt werden, um zu überprüfen, ob ein homogener Poisson-Prozess vorliegt. Testen Sie dazu mit Hilfe eines Kolmogoroff-Smirnov-Tests in R, ob die Zwischenzeiten T_n einer Exponentialverteilung mit Parameter $\hat{\lambda}_{\text{ML}}$ folgen, also $T_n \overset{\text{iid}}{\sim} Exp(\hat{\lambda}_{\text{ML}})$.