Beispiel 1.73

Max geht gerne auf Open-Air Festivals. Im Durchschnitt trifft er dort 6 weibliche Bekannte und 3 männliche Bekannte.

a) Formulieren Sie ein geeignetes Modell.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau 6 weibliche Bekannte trifft?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens einen männlichen Bekannten trifft?

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er weder einen männlichen noch eine weibliche Bekannte trifft, auf 2 verschiedene Arten. Diskutieren Sie eventuell zu treffende Zusatzannahmen.

Lösung

a) Sei X die Anzahl der getroffenen weiblichen Bekannten und Y die Anzahl der getroffenen männlichen Bekannten.
Es gilt (bzw. es gelte), da es sich um seltene Ereignisse handelt,

$$\begin{array}{lll} X & \sim & Po(6), \qquad \lambda_X = 6 \\ Y & \sim & Po(3), \qquad \lambda_Y = 3 \end{array}$$

b)

$$P(X = x) = \frac{\lambda_X^x}{x!} e^{-\lambda_X} = P(X = 6) = \frac{6^6}{6!} e^{-6} = 0.1606$$

c) $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$ mit $P(Y = 0) = \frac{\lambda_Y^{y_i}}{y!} e^{-\lambda_Y} = \frac{3^0}{0!} e^{-3}$
$\Rightarrow P(Y \geq 1) = 1 - \frac{3^0}{0!} e^{-3} = 1 - 0.0498 = 0.9502$

d) Unter Unabhängigkeit von X und Y gilt:

$$Z = X + Y \sim Po(\lambda_X + \lambda_Y),$$

also

$$\begin{aligned} P(Z = z) &= \frac{(\lambda_X + \lambda_Y)^z}{z!} e^{-(\lambda_X + \lambda_Y)} \\ P(Z = 0) &= \frac{(6+3)^0}{0!} e^{-(6+3)} = 0.0001 \end{aligned}$$

Alternative Berechnung:
„keinen Bekannten“ bedeutet $\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}$

$$\begin{aligned} P(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) &\overset{unabh.}{=} P(\{X = 0\}) \cdot P(\{Y = 0\}) = \\ &= \frac{\lambda_X^0}{0!} e^{-\lambda_X} \cdot \frac{\lambda_Y^0}{0^1} e^{-\lambda_Y} = \\ &= \frac{(\lambda_X + \lambda_Y)^0}{0!} e^{-(\lambda_X + \lambda_Y)} = \ldots \end{aligned}$$

Die Unabhängigkeitsannahme ist zentral, in dem Beispiel ist das Treffen eines männlichen und einer weiblichen Bekannten nicht unabhängig, wenn man viele Pärchen kennt (und Pärchen gemeinsam auf Open-Air Festivals gehen)