Beispiel 1.69

Risikobereite Slalomfahrer stürzen mit Wahrscheinlichkeit 10%, vorsichtigere mit 2%.

a) Schlagen Sie ein Modell für diese Situation vor und diskutieren Sie kurz die zugrunde gelegten Annahmen.

b) Wie groß sind jeweils die Wahrscheinlichkeiten, dass von 20 Fahrern mindestens einer stürzt?

c) Vergleichen Sie die durchschnittlich zu erwartende Anzahl von Stürzen von je 100 Rennläufern!

Lösung

a) Beschreibung der Situation durch ein Binomialmodell

- X_r Anzahl der Stürze der risikobereiten Fahrer

  X_v Anzahl der Stürze der vorsichtigen Fahrer
- Trefferwskten π_r, π_v konstant über die Rennfahrer in der jeweiligen Kategorie.
- n Anzahl der Rennläufer der jeweiligen Kategorie.
- Unabhängigkeit der Versuche nicht ganz unproblematisch (Stürze vorhergehender Fahrer führen eventuell zu grösserer Vorsicht; andererseits machen sie auch nervös), aber hier vorausgesetzt.

b) $n = 20$, gesucht: $P(X_r \geq 1)$, $P(X_v \geq 1)$, wobei:

$$P(X_r = k) = \binom{n}{k} \cdot \pi^k \cdot (1-\pi)^{n-k}$$

Dann gilt

$$P(X_r \geq 1) = P(X_r = 1) + P(X_r = 2) + \ldots + P(X_r = 20)$$

Zur Berechnung einfacher (typischer Trick: Schauen, ob Gegenereignis einfacher zu berechnen ist.):

$$\begin{aligned}
P(X_r \geq 1) &= 1 - P(X_r = 0) \\
&= 1 - \binom{n}{0} \cdot \pi_r^0 \cdot (1-\pi)^{n-0} \\
&= 1 - \binom{20}{0} \cdot (0.1)^0 \cdot (1-0.1)^{20} \\
&= 1 - \frac{20!}{(20-0)!0!} \cdot 1 \cdot (0.9)^{20} \\
&\approx 1 - 0.1216 \approx 0.8784
\end{aligned}$$

Analog:

$$
\begin{aligned}
P(X_v \geq 1) &= 1 - P(X_v = 0) \\
&= 1 - \binom{n}{0} \cdot \pi_v^0 \cdot (1 - \pi_v)^{n-0} \\
&= 1 - \binom{20}{0} \cdot (0.02)^0 \cdot (0.98)^2 \\
&\approx 1 - 0.6676 \approx 0.332
\end{aligned}
$$

c) Durchschnittlich erwartete Anzahl $\hat{=}$ Erwartungswert

$$\mathrm{E}(X_r) = n \cdot \pi_r \quad \text{und} \quad \mathrm{E}(X_v) = n \cdot \pi_v$$

also

$$\mathrm{E}(X_r) = 100 \cdot 0.1 = 10 \quad \text{und} \quad \mathrm{E}(X_v) = 100 \cdot 0.02 = 2.$$

Für den Vergleich ergibt sich damit

$$\frac{\mathrm{E}(X_r)}{\mathrm{E}(X_v)} = \frac{10}{2} = 5.$$

Es gilt allgemein für zwei binomialverteilte Zufallsvariablen:

$$\frac{\mathrm{E}(X_r)}{\mathrm{E}(X_v)} = \frac{n \cdot \pi_r}{n \cdot \pi_v} = \frac{\pi_r}{\pi_v}.$$