Aufgabe 26

Für $i = 1, \ldots, 10000$ beschreibe die (nichtnegative) Zufallsvariable X_i die Summe (in Euro), die eine Unfallversicherung an Person i bezahlen muss. Die Schadenssummen seien identisch und unabhängig verteilt. Weiterhin seien Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen bekannt:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_i) &= 100 \\ \mathrm{Var}(X_i) &= 10000. \end{aligned}$$

a) Wie ist der Mittelwert $\bar{X} := \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} X_i$ der Zufallsvariablen (approximativ) verteilt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Versicherung pro Person durchschnittlich eine Summe von mehr als 101 Euro auszahlen muss?

Aufgabe 27

Für die Berechnung des Maximum-Likelihood Schätzers werden elementare Rechenregeln (insbesondere die ln-Rechenregeln) benötigt und Ableitungen müssen berechnet werden. Rekapitulieren Sie diese Inhalte und ...

a) ... formen Sie die folgenden Terme um:
   (i) $\ln(x^a \cdot y) + \sqrt[7]{a^5}$
   (ii) $\ln\left((\frac{a}{b})^n\right)$
   (iii) $\ln(e^{2m+4n})$
   (iv) $\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i - a)^2\right)$
   (v) $\prod_{i=1}^{n}(b + 2q)$

b) ... leiten Sie die folgenden Terme nach λ ab:
   (i) $\ln(2\lambda - 1)$
   (ii) $(5\lambda - a)^4$
   (iii) $5b\lambda \cdot \ln(\lambda^2)$

c) Begründen Sie kurz, warum man für die Bestimmung des Optimums der Likelihood auch auch die log-Likelihood maximieren kann. Warum ist dieses Vorgehen sinnvoll?

Aufgabe 28

Aus der Vorlesung ist Ihnen bekannt, dass eine normalverteilte Zufallsvariable X die folgende Dichte besitzt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$$

Es seien insgesamt n unabhängig und identisch verteilte (iid) Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ mit konkreten Realisationen $x_1, ..., x_n$ gegeben.
Leiten Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für die unbekannten Parameter μ und σ^2 her.

Aufgabe 29

Wir betrachten n unabhängige Zufallsziehungen aus einer Normalverteilung ($n > 7$). Das i-te Experiment wird durch die Zufallsvariable X_i beschrieben, mit $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Wir betrachten drei mögliche Schätzer für den unbekannten Erwartungswert μ:

$$T_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad T_b = \frac{1}{3}\left(X_3 + X_5 + X_7\right) \quad \text{und } T_c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3}X_i + 3\right)$$

a) Prüfen Sie die Erwartungstreue der Schätzer.

b) Welchen Schätzer würden Sie bevorzugen? (Begründung!)