

ACHTUNG: Es handelt sich nur um Lösungsnotizen, nicht um vollständige Lösungen!

Lösungsnotizen Aufgabe 28 ML-Schätzer für σ^2

- 3. Schritt: Ableiten und Nullsetzen der Loglikelihoodfunktion

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2 | x_1, \dots, x_n)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

- 4. Schritt: Auflösen der Gleichung nach σ^2

$$\begin{aligned} -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 &\stackrel{!}{=} 0 && \frac{1}{2\sigma^2} \text{ ausklammern} \\ \frac{1}{2\sigma^2} \left(-n + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right) &= 0 && | : \frac{1}{2\sigma^2} \text{ und } | - n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 &= n && | \cdot \sigma^2 \text{ und } | : n \\ \Leftrightarrow \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned}$$

Man erhält durch Einsetzen von $\hat{\mu} = \bar{x}$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- Bemerkung: Der ML-Schätzer $\hat{\sigma}^2 = \tilde{S}^2$ für σ^2 ist die Stichprobenvarianz; diese ist nicht erwartungstreu.