

Lösungsnotizen Aufgabe 10 ../../Aufgabensammlung/Loesungen/L_1_12.tex

Formalisierung: $\tilde{\Omega}$: (Gesamtheit der) Wähler (Grundgesamtheit) $\tilde{\omega}$: (einzelner) Wähler ω_i : Wähler, der als i -te Person in die Stichprobe gelangte, $i = 1, \dots, 10$.Merkmal $\tilde{X} : \tilde{\Omega} \rightarrow \{\text{SPD, CDU/CSU, } \dots\}$ individuelle WahlentscheidungEreignisse A_{ij} , z.B. $A_{2,5} \hat{=} \text{„Die zweite gezogene Person wählte PDS“}$ **Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit:**

„Mindestens 9 mal PDS“ entspricht den Ereignissen: „10 mal PDS“ oder „9 mal PDS“:

$$\begin{aligned}
\text{„10 mal PDS“} &\hat{=} (PDS \cap PDS \cap PDS \dots \cap PDS) \\
&= (A_{1,5} \cap A_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \dots \cap A_{10,5}) \\
&\text{oder } \cup \\
\text{„9 mal PDS“} &= (\bar{A}_{1,5} \cap A_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \dots \cap A_{10,5}) \\
&\cup (A_{1,5} \cap \bar{A}_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \dots \cap A_{10,5}) \\
&\cup \dots \\
&\cup (A_{1,5} \cap A_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \dots \cap \bar{A}_{10,5})
\end{aligned}$$

Alle Ereignisse für „Mindestens 9 mal PDS“ sind jeweils paarweise disjunkt, ihre Wahrscheinlichkeiten können also addiert werden.

$$\begin{aligned}
P(\text{„9 mal PDS“}) &= P(\bar{A}_{1,5} \cap A_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \dots \cap A_{10,5}) \\
&\quad + P(A_{1,5} \cap \bar{A}_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \dots \cap A_{10,5}) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + P(A_{1,5} \cap A_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \dots \cap \bar{A}_{10,5})
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Unabhängigkeit lassen sich die benötigten Wahrscheinlichkeiten bestimmen:

- „10 mal PDS“

$$\begin{aligned}
P(A_{1,5} \cap A_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \dots \cap A_{10,5}) &= P(A_{1,5}) \cdot P(A_{2,5}) \cdot P(A_{3,5}) \cdot \dots \cdot P(A_{10,5}) \\
&= f_5 \cdot f_5 \cdot f_5 \cdot \dots \cdot f_5 \\
&= (f_5)^{10} = (0.04)^{10} \approx 0 \quad (1.048576e - 14).
\end{aligned}$$

- „9 mal PDS“

$$\begin{aligned}P(\bar{A}_{1,5} \cap A_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \dots \cap A_{10,5}) &= P(\bar{A}_{1,5}) \cdot P(A_{2,5}) \cdot P(A_{3,5}) \cdot \dots \cdot P(A_{10,5}) \\&= (1 - f_5) \cdot f_5 \cdot f_5 \cdot \dots \cdot f_5 \\&= (1 - f_5) \cdot (f_5)^9 = 0.96 \cdot (0.04)^9 \approx 0 \quad (2.516582e - 13)\end{aligned}$$

Analog:

$$P(A_{1,5} \cap \bar{A}_{2,5} \cap A_{3,5} \cap \dots \cap A_{10,5}) = f_5 \cdot (1 - f_5) \cdot f_5 \cdot \dots \cdot f_5 = (1 - f_5) \cdot (f_5)^9$$

Insgesamt gilt:

$$\begin{aligned}P(\text{„Mindestens 9 mal PDS“}) &= (f_5)^{10} + 10 \cdot (1 - f_5) \cdot (f_5)^9 \\&= (0.04)^{10} + 10 \cdot (0.96) \cdot (0.04)^9 \\&= 0.2527 \cdot 10^{-11} \approx 0\end{aligned}$$

Also selbst bei sehr kleinem Stichprobenumfang ($n = 10$) ist die Wahrscheinlichkeit einer extremen Verzerrung hin zur PDS sehr gering.