2 Induktive Statistik

2.1 Grundprinzipien der induktiven Statistik

2.2 Punktschätzung

2.2.1 Schätzfunktionen

Definition 2.1 Sei $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Stichprobe. Eine Funktion

$$T = g(X_1, \ldots, X_n)$$

heißt *Schätzer* oder *Schätzfunktion*.

Andere Notation in der Literatur: $\hat{\vartheta}$ Schätzer für ϑ.

2.2.2 Gütekriterien

Erwartungstreue, Bias: Gegeben sei eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ und eine Schätzfunktion $T = g(X_1, \ldots, X_n)$ (mit existierendem Erwartungswert).

- T heißt *erwartungstreu für den Parameter* ϑ, falls gilt

  $$\mathrm{E}_\vartheta(T) = \vartheta$$

  für alle ϑ.

- Die Größe

  $$\mathrm{Bias}_\vartheta(T) = \mathrm{E}_\vartheta(T) - \vartheta$$

  heißt *Bias* (oder *Verzerrung*) der Schätzfunktion. Erwartungstreue Schätzfunktionen haben per Definition einen Bias von 0.

- Die korrigierte Stichprobenvarianz

  $$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}(\bar{X})^2$$

  ist erwartungstreu für σ^2.

2.2.3 Effizienz

Effizienz

- Gegeben seien zwei erwartungstreue Schätzfunktionen T_1 und T_2 für einen Parameter ϑ. Gilt
$$\mathrm{Var}_\vartheta(T_1) \leq \mathrm{Var}_\vartheta(T_2) \text{ für alle } \vartheta$$
und
$$\mathrm{Var}_{\vartheta^*}(T_1) < \mathrm{Var}_{\vartheta^*}(T_2) \text{ für mindestens ein } \vartheta^*$$
so heißt T_1 *effizienter als* T_2.
- Eine für ϑ erwartungstreue Schätzfunktion T heißt *UMVU-Schätzfunktion* für ϑ (*u*niformly *m*inimum *v*ariance *u*nbiased), falls
$$\mathrm{Var}_\vartheta(T) \leq \mathrm{Var}_\vartheta(T^*)$$
für alle ϑ und für alle erwartungstreuen Schätzfunktionen T^*.

MSE

$$\mathrm{MSE}_\vartheta(T) := \mathrm{E}_\vartheta(T-\vartheta)^2 = \mathrm{Var}_\vartheta(T) + (\mathrm{Bias}_\vartheta(T))^2$$

2.2.4 Asymptotische Gütekriterien

- **Asymptotische Erwartungstreue**
Eine Schätzfunktion heißt *asymptotisch erwartungstreu*, falls
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(\hat{\vartheta}) = \vartheta$$
bzw.
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Bias}(\hat{\vartheta}) = 0$$
gelten.
- Ein Schätzer heißt *(MSE-)konsistent* oder *konsistent im quadratischen Mittel*, wenn gilt
$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{MSE}(T)) = 0.$$

2.2.5 Konstruktionsprinzipien guter Schätzer

Die Methode der kleinsten Quadrate

Das Maximum-Likelihood-Prinzip

Definition 2.2 Gegeben sei die Realisation $x_1, \ldots, x_n$ einer i.i.d. Stichprobe. Die Funktion in ϑ

$$L(\vartheta || x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n P_\vartheta(X_i = x_i) & \text{falls } X_i \text{ diskret} \\ \prod_{i=1}^n f_\vartheta(x_i) & \text{falls } X_i \text{ stetig.} \end{cases}$$

heißt *Likelihood* des Parameters ϑ bei der Beobachtung $x_1, \ldots, x_n$.
Derjenige Wert $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(x_1, \ldots, x_n)$, der $L(\vartheta)$ maximiert, heißt *Maximum-Likelihood-Schätzwert*; die zugehörige Schätzfunktion $T(X_1, \ldots, X_n)$ *Maximum-Likelihood-Schätzer.*

Praktische Berechnung

Für die praktische Berechnung maximiert man statt der Likelihood typischerweise die Log-Likelihood

$$l(\vartheta || x_1, \ldots, x_n) = \ln(L(\vartheta)) = \ln \prod_{i=1}^{n} P_\vartheta(X_i = x_i) = \sum_{i=1}^{n} \ln P_\vartheta(X_i = x_i)$$

bzw.

$$l(\vartheta || x_1, \ldots, x_n) = \ln \prod_{i=1}^{n} f_\vartheta(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_\vartheta(x_i).$$

2.3 Intervallschätzung

2.3.1 Motivation und Hinführung

2.3.2 Konfidenzintervalle: Definition

Definition 2.3 Gegeben sei eine i.i.d. Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ zur Schätzung eines Parameters ϑ und eine Zahl $\gamma \in (0; 1)$. Ein zufälliges Intervall $\mathcal{C}(X_1, \ldots, X_n)$ heißt *Konfidenzintervall* zum *Sicherheitsgrad* γ (Konfidenzniveau γ), falls für jedes ϑ gilt:

$$P_\vartheta(\vartheta \in \underbrace{\mathcal{C}(X_1, \ldots, X_n)}_{\text{zufälliges Intervall}}) \geq \gamma.$$

2.3.3 Konfidenzintervallen: Konstruktion

Praktische Vorgehensweise: Suche Zufallsvariable Z_ϑ, die

- den gesuchten Parameter ϑ enthält und
- deren Verteilung aber nicht mehr von dem Parameter abhängt, („*Pivotgröße*“, dt. Angelpunkt).
- Dann wähle den Bereich C_Z so, dass $P_\vartheta(Z_\vartheta \in C_Z) = \gamma$ und
- löse nach ϑ auf.

Konfidenzintervall für den Mittelwert eines normalverteilten Merkmals

- **bei bekannter Varianz:**

$$\left[\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[\bar{X} \pm z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- **bei unbekannter Varianz:**
$$\left[\bar{X} \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Definition 2.4 (t-Verteilung) Gegeben sei eine i.i.d. Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann heißt die Verteilung von
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \cdot \sqrt{n}$$
t-Verteilung (oder Student-Verteilung) mit $\nu = n - 1$ *Freiheitsgraden*. In Zeichen: $Z \sim t(\nu)$.

2.3.4 Approximatives Konfidenzintervall für den Anteil π eines binomialverteilten Merkmals

Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit $X_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ und $P(X_i = 1) = \pi$.
Dann gilt approximativ für großes n
$$\frac{\bar{X} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}}} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$
und damit für das Konfidenzintervall:
$$\left[\bar{X} \pm z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right].$$

2.3.5 Bestimmung des Stichprobenumfangs für die Anteilsschätzung

γ: Konfidenzniveau
$b_{\max}$: Schranke für die Genauigkeit
$$z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \leq b_{\max}$$
Auflösen nach n:
$$n \geq \frac{1}{b_{\max}^2} z_{\frac{1+\gamma}{2}}^2 \cdot \bar{X}(1-\bar{X})$$

2.4 Hypothesentests

2.4.1 Grundprinzipien statistischer Hypothesentests

2.4.2 Konstruktion eines parametrischen statistischen Tests

2.4.3 Typische Tests I: Tests auf Lageparameter

Gauß–Test

- Situation: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Stichprobe, wobei X_i jeweils normalverteilt sei mit unbekanntem Mittelwert μ und bekannter Varianz σ^2.

- Statistische Hypothesen:

$$\begin{array}{llll} \text{Fall 1:} & H_0: \ \mu \leq \mu_0 & \text{gegen} & H_1: \ \mu > \mu_0 \\ \text{Fall 2:} & H_0: \ \mu \geq \mu_0 & \text{gegen} & H_1: \ \mu < \mu_0 \\ \text{Fall 3:} & H_0: \ \mu = \mu_0 & \text{gegen} & H_1: \ \mu \neq \mu_0 \end{array}$$

- Testgröße:

$$T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

Falls $\mu = \mu_0$ gilt:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

- Kritische Region:
  - Fall 1: H_0 ablehnen, falls:

$$T \geq z_{1-\alpha} \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{X} \in \left[\mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,;\, \infty\right)$$

  - Fall 2: H_0 ablehnen, falls:

$$T \leq -z_{1-\alpha} \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{X} \in \left(-\infty; \mu_0 - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

  - Fall 3: H_0 ablehnen, falls:

$$T \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ oder } T \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \text{ also } |T| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

t–Test

- Situation: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Stichprobe, wobei X_i jeweils normalverteilt sei mit unbekanntem Mittelwert μ und *unbekannter* Varianz σ^2
- Statistische Hypothesen:

$$\begin{array}{llll} \text{Fall 1:} & H_0: \ \mu \leq \mu_0 & \text{gegen} & H_1: \ \mu > \mu_0 \\ \text{Fall 2:} & H_0: \ \mu \geq \mu_0 & \text{gegen} & H_1: \ \mu < \mu_0 \\ \text{Fall 3:} & H_0: \ \mu = \mu_0 & \text{gegen} & H_1: \ \mu \neq \mu_0 \end{array}$$

- Testgröße:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$$

Falls $\mu = \mu_0$ gilt:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \sim t(n-1)$$

- Kritische Region:
  - Fall 1: H_0 ablehnen, falls $T \geq t_{1-\alpha}(n-1)$
  - Fall 2: H_0 ablehnen, falls $T \leq -t_{1-\alpha}(n-1)$
  - Fall 3: H_0 ablehnen, falls $T \leq -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ oder $T \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

Approximative Tests für Hypothesen über Anteilswerte

- Situation: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Stichprobe, wobei $X_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ gelte und $P(X_i = 1) = \pi$ unbekannt sei.
- Statistische Hypothesen:

$$\begin{array}{lllll} \text{Fall 1:} & H_0: & \pi \leq \pi_0 & \text{gegen} & H_1: & \pi > \pi_0 \\ \text{Fall 2:} & H_0: & \pi \geq \pi_0 & \text{gegen} & H_1: & \pi < \pi_0 \\ \text{Fall 3:} & H_0: & \pi = \pi_0 & \text{gegen} & H_1: & \pi \neq \pi_0 \end{array}$$

- Testgröße:

$$\frac{\bar{X} - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$$

  Falls $\pi = \pi_0$ gilt:

$$\frac{\bar{X} - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0,1),$$

- Kritische Region:
  - Fall 1: H_0 ablehnen, falls $T \geq z_{1-\alpha}$
  - Fall 2: H_0 ablehnen, falls $T \leq -z_{1-\alpha}$
  - Fall 3: H_0 ablehnen, falls $T \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ oder $T \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

2.4.4 Typische Tests II: Lagevergleiche aus unabhängigen Stichproben

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Stichprobe aus Gruppe A, $Y_1, \dots, Y_m$ i.i.d. Stichprobe aus Gruppe B

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X; \sigma_X^2) \qquad Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_Y; \sigma_Y^2).$$

Statistische Hypothesen:

$$\begin{array}{lllll} \text{Fall 1:} & H_0: & \mu_X \leq \mu_Y & \text{gegen} & H_1: & \mu_X > \mu_Y \\ \text{Fall 2:} & H_0: & \mu_X \geq \mu_Y & \text{gegen} & H_1: & \mu_X < \mu_Y \\ \text{Fall 3:} & H_0: & \mu_X = \mu_Y & \text{gegen} & H_1: & \mu_X \neq \mu_Y \end{array}$$

Zwei-Stichproben-Gauß–Test

Die Varianzen σ_X^2 und σ_Y^2 werden als bekannt angenommen.

- Testgröße:
$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$
Falls $\mu_X = \mu_Y$ ist, gilt
$$T \sim \mathcal{N}(0, 1)$$
- Kritische Region:
  - Fall 1: H_0 ablehnen, falls $T \geq z_{1-\alpha}$
  - Fall 2: H_0 ablehnen, falls $T \leq -z_{1-\alpha}$
  - Fall 3: H_0 ablehnen, falls $T \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ oder $T \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Zwei-Stichproben-t-Test

Die Varianzen σ_X^2 und σ_Y^2 seien unbekannt.

- **Variante I**
Ist bekannt, dass die Varianzen gleich sind, so schätzt man sie mittels S_X^2 und S_Y^2.
Testgröße:
$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}}}$$
Falls $\mu_X = \mu_Y$ gehorcht T einer t-Verteilung mit $(n + m - 2)$ Freiheitsgraden.

  Kritische Region:
  - Fall 1: H_0 ablehnen, falls $T \geq t_{1-\alpha}(n + m - 2)$
  - Fall 2: H_0 ablehnen, falls $T \leq -t_{1-\alpha}(n + m - 2)$
  - Fall 3: H_0 ablehnen, falls $T \leq -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n + m - 2)$ oder $T \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n + m - 2)$

- **Variante II**
  Können die Varianzen nicht als gleich angenommen werden, so kann für großes n und großes m mit folgender Testgröße gerechnet werden:
  Testgröße:
  $$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}}$$
  T ist für $\mu_X = \mu_Y$ approximativ standardnormalverteilt und kann auch angewendet werden, wenn keine Normalverteilung vorliegt.
  Kritische Region:
  - Fall 1: H_0 ablehnen, falls $T \geq z_{1-\alpha}$
  - Fall 2: H_0 ablehnen, falls $T \leq -z_{1-\alpha}$
  - Fall 3: H_0 ablehnen, falls $T \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ oder $T \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

2.4.5 Gauß–Test und t-Test für verbundene Stichproben

Verbundene Stichproben: Vergleich zweier Merkmale X und Y, die jetzt an *denselben* Einheiten erhoben werden.

$$\begin{array}{rll} X_1, \ldots, X_n & \text{i.i.d.} & \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y_1, \ldots, Y_n & \text{i.i.d.} & \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array}$$

Zum Testen von Hypothesen der Form

$$\begin{array}{llll} \text{Fall 1} & H_0: \ \mu_X \leq \mu_Y & \text{gegen} & H_1: \ \mu_X > \mu_Y \\ \text{Fall 2} & H_0: \ \mu_X \geq \mu_Y & \text{gegen} & H_1: \ \mu_X < \mu_Y \\ \text{Fall 3} & H_0: \ \mu_X = \mu_Y & \text{gegen} & H_1: \ \mu_X \neq \mu_Y \end{array}$$

betrachtet man die Differenz $D_i = X_i - Y_i$. Für den Erwartungswert μ_D gilt

$$\mu_D = \mathrm{E}(D_i) = \mu_X - \mu_Y$$

und für die Varianz σ_D^2

$$\sigma_D^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY} \quad \text{mit } \sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X, Y)$$

Wegen $D_i \sim \mathcal{N}(\mu_D, \sigma_D^2)$ mit $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$ und $\sigma_D^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}$ sind obige Hypothesen äquivalent zu den Hypothesen

$$\begin{array}{llll} \text{Fall 1'} & H_0: \ \mu_D \leq 0 & \text{gegen} & H_1: \ \mu_D > 0 \\ \text{Fall 2'} & H_0: \ \mu_D \geq 0 & \text{gegen} & H_1: \ \mu_D < 0 \\ \text{Fall 3'} & H_0: \ \mu_D = 0 & \text{gegen} & H_1: \ \mu_D \neq 0, \end{array}$$

und man kann unmittelbar die Tests aus 2.4.3 anwenden. Sind die Varianzen unbekannt, so kann man σ_D aus den Differenzen D_i, $i = 1, \ldots, n$ schätzen. Zur Prüfung ist dann die t-Verteilung heranzuziehen.

2.4.6 $\chi 2$-Tests am Beispiel des $\chi 2$-Unabhängigkeitstests

$\chi 2$-Unabhängigkeitstest

$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ i.i.d. Stichprobe des zwei-dimensionalen Merkmals (X, Y).

- Statistische Hypothesen:
  H_0: Es herrscht Unabhängigkeit.
  H_1: Es herrscht keine Unabhängigkeit.

  d.h. H_0: $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$ für alle Paare i, j
  gegen H_1: $P(X = x_i, Y = y_j) \neq P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$ für mindestens *ein* Paar i, j

- Teststatistik:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \frac{\left(h_{ij} - \frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n}\right)^2}{\frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n}} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} n \cdot \frac{\left(\frac{h_j}{n} - \frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n^2}\right)^2}{\frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n^2}} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} n \cdot \frac{(f_{ij} - f_{i\bullet} f_{\bullet j})^2}{f_{i\bullet} f_{\bullet j}} \end{aligned}$$

  Unter H_0 gehorcht T approximativ einer sogenannten χ^2 Verteilung mit $(k-1) \cdot (m-1)$ Freiheitsgraden.

- Kritische Region:
  H_0 ablehnen, falls

$$T > \chi^2_{1-\alpha}((k-1) \cdot (m-1)),$$

  wobei $\chi^2_{1-\alpha}((k-1) \cdot (m-1))$ das $(1-\alpha)$-Quantil der χ^2-Verteilung mit $(k-1)(m-1)$ Freiheitsgraden bezeichnet.

2.4.7 Zur praktischen Anwendung statistischer Tests

Testentscheidungen und Statistik-Software, p-Wert

Dualität von Test und Konfidenzintervall

Signifikanz versus Relevanz

Multiple Testprobleme

Nichtparametrische Tests

2.5 Lineare Regressionsmodelle

2.5.1 Wiederholung aus Statistik I

2.5.2 Lineare Einfachregression

Statistische Sichtweise

- Wahres Modell: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$
- Gestört durch zufällige Fehler ϵ_i: Beobachtung von Datenpaaren (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$ mit

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \quad \text{wobei}$$

  - $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
  - σ^2 für alle i gleich
  - $\epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}$ stochastisch unabhängig für $i_1 \neq i_2$

Maximum Likelihood Schätzer

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X},$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 \quad \text{mit den geschätzten Residuen } \hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i$$

Konstruktion von Konfidenzintervallen und Tests

Mit

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} := \frac{\hat{\sigma}\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}{\sqrt{n\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \qquad \text{gilt} \qquad \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \sim t(n-2)$$

und analog mit

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} := \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \qquad \text{gilt} \qquad \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \sim t(n-2).$$

- Konfidenzintervalle zum Sicherheitsgrad γ:

$$\begin{aligned} &\text{für } \beta_0\colon && \left[\hat{\beta}_0 \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} \cdot t_{1+\frac{\gamma}{2}}(n-2)\right] \\ &\text{für } \beta_1\colon && \left[\hat{\beta}_1 \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-2)\right] \end{aligned}$$

- Hypothesen und kritischen Region:

	Hypothesen			kritische Region
Fall 1:	$H_0\colon \beta_1 \le \beta_1^*$	gegen	$\beta_1 > \beta_1^*$	$T_{\beta_1^*} \ge t_{1-\alpha}(n-2)$
Fall 2:	$H_0\colon \beta_1 \ge \beta_1^*$	gegen	$\beta_1 < \beta_1^*$	$T_{\beta_1^*} \le t_{1-\alpha}(n-2)$
Fall 3:	$H_0\colon \beta_1 = \beta_1^*$	gegen	$\beta_1 \neq \beta_1^*$	$\lvert T_{\beta_1^*}\rvert \ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$

mit der Teststatistik

$$T_{\beta_1^*} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^*}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$$

(analog für $\hat{\beta}_0$).

Typischer SPSS-Output

Koeffizienten^a

			Standardisierte Koeffizienten		
	β	Standardfehler	Beta	T	Signifikanz
Konstante	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}$	5)	1)	3)
Unabhängige Variable	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$	6)	2)	4)

^{a} abhängige Variable

1) Wert der Teststatistik

$$T_{\beta_0^*} = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}.$$

zum Testen von H_0: $\beta_0 = 0$ gegen H_1: $\beta_0 \neq 0$.

2) Analog: Wert von

$$T_{\beta_1^*} = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$$

zum Testen von H_0: $\beta_1 = 0$ gegen H_1: $\beta_1 \neq 0$.

3) p-Wert zu 1)

4) p-Wert zu 2)

5), 6) hier nicht von Interesse.

2.5.3 Multiple lineare Regression

- Modellierungsansatz:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_p X_{ip} + \epsilon_i$$

- Es gilt für jedes $j = 0, \ldots, p$

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \sim t(n-p-1)$$

und man erhält wieder Konfidenzintervalle für β_j:

$$[\hat{\beta}_j \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} \cdot t_{1+\frac{\gamma}{2}}(n-p-1)]$$

sowie entsprechende Tests.

2.5.4 Varianzanalyse (Analysis of Variance, ANOVA)

Beobachtungen: Y_{ij}

$j = 1, \dots, J$	Faktorstufen
$i = 1, \dots, n_j$	Personenindex in der j-ten Faktorstufe

Zwei äquivalente Modellformulierungen:

- Modell in Mittelwertdarstellung:

$$Y_{ij} = \mu_j + \epsilon_{ij} \qquad j = 1, \dots, J,\ i = 1, \dots, n_j,$$

mit

μ_j	faktorspezifischer Mittelwert
ϵ_{ij}	zufällige Störgröße
ϵ_{ij}	$\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\quad \epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \dots, \epsilon_{Jn_J}$ unabhängig.

Testproblem:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu_1 = \mu_2 = \dots \mu_J \\ \text{gegen } H_1 &: \quad \mu_l \neq \mu_q \quad \text{für mindestens ein Paar } (l, q) \end{aligned}$$

- Modell in Effektdarstellung:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_j + \epsilon_{ij}$$

wobei α_j so, dass

$$\sum_{j=1}^{J} n_j \alpha_j = 0.$$

μ	globaler Erwartungswert
α_j	Effekt in der j-ten Faktorstufe, faktorspezifische systematische Abweichung vom gemeinsamen Mittelwert μ

Testproblem:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_J = 0 \\ \text{gegen } H_1 &: \quad \alpha_j \neq 0 \text{ für mindestens ein } j \end{aligned}$$

Die beiden Modelle sind äquivalent: setze $\mu_j := \mu + \alpha_j$.

Streuungszerlegung

Mittelwerte:

$$\begin{array}{ll} \bar{Y}_{\bullet\bullet} & \text{Gesamtmittelwert in der Stichprobe} \\ \bar{Y}_{\bullet j} & \text{Mittelwert in der } j\text{-ten Faktorstufe} \end{array}$$

Es gilt (vgl. Statistik I) die Streuungszerlegung:

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2 = \underbrace{\sum_{j=1}^{J} n_j(\bar{Y}_{\bullet j} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2}_{SQE} + \underbrace{\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij} - \bar{Y}_{\bullet j})^2}_{SQR}$$

- Hypothesen:

  $$\begin{aligned} H_0: &\quad \mu_1 = \mu_2 = \ldots \mu_J \\ \text{gegen } H_1: &\quad \mu_l \neq \mu_q \quad \text{für mindestens ein Paar } (l, q) \end{aligned}$$

  beziehungsweise

  $$\begin{aligned} H_0: &\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_J = 0 \\ \text{gegen } H_1: &\quad \alpha_j \neq 0 \text{ für mindestens ein } j \end{aligned}$$

- Testgröße:

  $$F = \frac{SQE/(J-1)}{SQR/(n-J)}$$

  Falls H_0 wahr ist, ist T F-verteilt mit $(J-1)$ und $(n-J)$ Freiheitsgraden.

- Kritische Region:
  H_0 ablehnen, falls

  $$T > F_{1-\alpha}(J-1, n-J),$$

  mit dem entsprechenden $(1-\alpha)$-Quantil der F-Verteilung mit $(J-1)$ und $(n-J)$ Freiheitsgraden.

Standardnormalverteilung

Tabelliert sind die Werte der Verteilungsfunktion $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ für $z \geq 0$.
Ablesebeispiel: $\Phi(1.75) = 0.9599$
Funktionswerte für negative Argumente: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$
Die z-Quantile ergeben sich über die Umkehrfunktion.
Beispielsweise ist $z_{0.9599} = 1.75$ und $z_{0.9750} = 1.96$.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

Students t-Verteilung

Tabelliert sind die Quantile für n Freiheitsgrade.
Für das Quantil $t_{1-\alpha}(\nu)$ gilt $F(t_{1-\alpha}(\nu)) = 1 - \alpha$.
Links vom Quantil $t_{1-\alpha}(\nu)$ liegt die Wahrscheinlichkeitsmasse $1 - \alpha$.
Ablesebeispiel: $t_{0.99}(20) = 2.528$
Die Quantile für $0 < 1 - \alpha < 0.5$ erhält man aus $t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$

Approximation für $\nu > 30$:

$$t_\alpha(\nu) \approx z_\alpha \quad (z_\alpha \text{ ist das } (\alpha)\text{-Quantil der Standardnormalverteilung})$$

ν	0.6	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.3249	1.3764	3.0777	6.3138	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	0.2887	1.0607	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	22.327	31.599
3	0.2767	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	10.215	12.924
4	0.2707	0.9410	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	7.1732	8.6103
5	0.2672	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	5.8934	6.8688
6	0.2648	0.9057	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.2076	5.9588
7	0.2632	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.7853	5.4079
8	0.2619	0.8889	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	4.5008	5.0413
9	0.2610	0.8834	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.2968	4.7809
10	0.2602	0.8791	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.1437	4.5869
11	0.2596	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.0247	4.4370
12	0.2590	0.8726	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.9296	4.3178
13	0.2586	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.8520	4.2208
14	0.2582	0.8681	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.7874	4.1405
15	0.2579	0.8662	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.7328	4.0728
16	0.2576	0.8647	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.6862	4.0150
17	0.2573	0.8633	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.6458	3.9651
18	0.2571	0.8620	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.6105	3.9216
19	0.2569	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.5794	3.8834
20	0.2567	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.5518	3.8495
21	0.2566	0.8591	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.5272	3.8193
22	0.2564	0.8583	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.5050	3.7921
23	0.2563	0.8575	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.4850	3.7676
24	0.2562	0.8569	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.4668	3.7454
25	0.2561	0.8562	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.4502	3.7251
26	0.2560	0.8557	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.4350	3.7066
27	0.2559	0.8551	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.4210	3.6896
28	0.2558	0.8546	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.4082	3.6739
29	0.2557	0.8542	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.3962	3.6594
30	0.2556	0.8538	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.3852	3.6460
∞	0.2533	0.8416	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0903	3.2906

χ2-Verteilung

Tabelliert sind die Quantile für n Freiheitsgrade.
Für das Quantil $\chi^2_{1-\alpha,n}$ gilt $F(\chi^2_{1-\alpha,n}) = 1-\alpha\,.$
Links vom Quantil $\chi^2_{1-\alpha,n}$ liegt die Wahrscheinlichkeitsmasse $1-\alpha$.
Ablesebeispiel: $\chi^2_{0.95,10} = 18.307$

Approximation für $n > 30$:

$$\chi^2_\alpha(n) \approx \frac{1}{2}(z_\alpha + \sqrt{2n-1})^2 \quad (z_\alpha \text{ ist das } 1-\alpha\text{-Quantil der Standardnormalverteilung})$$

n	0.01	0.025	0.05	0.1	0.5	0.9	0.95	0.975	0.99
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.345
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.143	13.277
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.070	12.833	15.086
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.2390	1.6899	2.1674	2.8331	6.3458	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.987	18.307	20.483	23.209
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.341	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.340	18.549	21.026	23.337	26.217
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.340	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.339	21.064	23.685	26.119	29.141
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.339	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.338	23.542	26.296	28.845	32.000
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.085	16.338	24.769	27.587	30.191	33.409
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.865	17.338	25.989	28.869	31.526	34.805
19	7.6327	8.9065	10.117	11.651	18.338	27.204	30.144	32.852	36.191
20	8.2604	9.5908	10.851	12.443	19.337	28.412	31.410	34.170	37.566
21	8.8972	10.283	11.591	13.240	20.337	29.615	32.671	35.479	38.932
22	9.5425	10.982	12.338	14.041	21.337	30.813	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.689	13.091	14.848	22.337	32.007	35.172	38.076	41.638
24	10.856	12.401	13.848	15.659	23.337	33.196	36.415	39.364	42.980
25	11.524	13.120	14.611	16.473	24.337	34.382	37.652	40.646	44.314
26	12.198	13.844	15.379	17.292	25.336	35.563	38.885	41.923	45.642
27	12.879	14.573	16.151	18.114	26.336	36.741	40.113	43.195	46.963
28	13.565	15.308	16.928	18.939	27.336	37.916	41.337	44.461	48.278
29	14.256	16.047	17.708	19.768	28.336	39.087	42.557	45.722	49.588
30	14.953	16.791	18.493	20.599	29.336	40.256	43.773	46.979	50.892