

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

--	--	--

Formelsammlung zur Vorlesung

Statistik II für Studierende der Soziologie und Nebenfachstudierende

Prof. Dr. Thomas Augustin, Johanna Brandt, Julia Plaß
SoSe 2014

Handschriftliche Kommentare im Original sind nur auf den bedruckten Seiten erlaubt!

1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

1.1 Mengen und elementare Mengenoperationen

Definition 1.1 Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen. Die einzelnen Objekte einer Menge werden *Elemente* genannt.

Grundlegende Begriffe der Mengenlehre

- **Standardmengen:**

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	Menge der reellen Zahlen
\emptyset	leere Menge

- **Elementeigenschaft:**

x ist Element der Menge A : $x \in A$

x ist nicht Element der Menge A : $x \notin A$

- **Teilmengen:** A ist Teilmenge von B , in Zeichen $A \subset B$, wenn jedes Element von A auch in B ist.

- **Schnittmenge:** Die Schnittmenge $A \cap B$ ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Eigenschaften:

- Gilt $A \subset B$, so ist $A \cap B = A$.
- Für jede Menge A gilt: $A \cap A = A$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- Zwei Mengen A und B mit $A \cap B = \emptyset$, d.h. zwei Mengen, die kein gemeinsames Element haben, heißen *disjunkt*.
- Verallgemeinerung: Die Schnittmenge aus n Mengen A_1, \dots, A_n enthält alle Elemente, die in jeder der Mengen A_1, \dots, A_n enthalten sind und wird bezeichnet mit

$$\bigcap_{i=1}^n A_i := A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

- **Vereinigungsmenge:** Die Vereinigungsmenge $A \cup B$ ist die Menge aller Elemente, die in A oder B enthalten sind:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Verallgemeinerung: Die Vereinigungsmenge aus n Mengen M_1, \dots, M_n enthält alle Elemente, die in mindestens einer der Mengen M_1, \dots, M_n enthalten sind und wird bezeichnet mit

$$\bigcup_{i=1}^n M_i := M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$$

- **Differenzmenge:** Die Differenzmenge $A \setminus B$ ist die Menge aller Elemente, die in A , aber nicht in B enthalten sind:

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ aber } x \notin B\}$$

- **Komplementärmenge:** Die Komplementärmenge $\bar{A} = A^C$ bezüglich einer Grundmenge Ω ist die Menge aller Elemente von Ω , die nicht in A sind:

$$\bar{A} = A^C = \{x \in \Omega | x \notin A\} = \{x : x \notin A\}$$

- **Potenzmenge:** Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist die Menge aller Teilmengen von A :

$$\mathcal{P}(A) = \{M | M \subset A\}.$$

- **Mächtigkeit:** Die Mächtigkeit $|A|$ einer Menge A ist die Anzahl der Elemente von A

Rechenregeln für Mengen

a) Kommutativgesetze (Vertauschung):

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A.$$

b) Assoziativgesetze (Zusammenfassen):

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C). \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

c) Distributivgesetze (Ausklammern/Ausmultiplizieren):

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C). \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

d) De Morgansche Regeln:

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

e) Aus $A \subset B$ folgt $\bar{B} \subset \bar{A}$.

f) Für die Differenzmenge gilt $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

g) Für die Potenzmenge gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Das kartesische Produkt

Das *kartesische Produkt* zweier Mengen

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\} \\ B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_m\}$$

ist die Menge

$$A \times B := \{(a_i, b_j) \mid i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m\}$$

Sie besteht also aus allen möglichen Kombinationen der Elemente von A und B :

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), \dots, (a_1, b_m), \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), \dots, (a_2, b_m), \\ \vdots \\ (a_k, b_1), (a_k, b_2), (a_k, b_3), \dots, (a_k, b_m)\}$$

Verallgemeinerungen:

- Das kartesische Produkt der Mengen $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ wird mit

$$\prod_{i=1}^n \Omega_i = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$$

bezeichnet und besteht aus allen möglichen n -Tupeln, die sich (unter Beachtung der Reihenfolge) aus Elementen aus $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ bilden lassen.

- Die Mengen $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ müssen nicht endlich sein; für endliche Mengen gilt

$$\left| \prod_{i=1}^n \Omega_i \right| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| \cdot \dots \cdot |\Omega_n|$$

- Kartesische Produkte werden verwendet, um Ergebnisse komplexer Experimente aus Einzelexperimenten zusammenzusetzen.

1.2 Wahrscheinlichkeit – Ein komplexer Begriff und seine Formalisierung

1.2.1 Zufallsvorgänge

1.2.2 Laplace-Wahrscheinlichkeiten und Urnenmodelle

Abzählregel

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Laplace-Wahrscheinlichkeit

In einem Laplace-Experiment gilt für $P(A)$ mit $|A| = M$ und $|\Omega| = N$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{M}{N}.$$

Urnenmodell

- Grundgesamtheit: Urne mit N nummerierten Kugeln
- Stichprobe: Zufälliges Ziehen von n Kugeln aus der Urne

Ziehen mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge

- Ziehe Stichprobe vom Umfang n **mit** Zurücklegen.
- $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_j \in \{1, \dots, N\}\}$
(Das selbe Element kann mehrfach vorkommen.)
- Anzahl möglicher Stichproben:

$$|\Omega| = \underbrace{N \cdot N \cdot \dots \cdot N}_{n\text{-Faktoren}} = N^n$$

Ziehen ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge

- Ziehe Stichprobe vom Umfang n **ohne** Zurücklegen.
- $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_j \in \{1, \dots, N\}, \omega_j \neq \omega_i \text{ für } i \neq j\}$
(Jedes Element kann nur einmal vorkommen.)
- Anzahl möglicher Stichproben:

$$|\Omega| = N \cdot (N - 1) \cdot \dots \cdot N - n + 1 = \frac{N!}{(N - n)!}$$

Wiederholung Fakultät: Die *Fakultät* einer natürlichen Zahl k ist definiert als

$$k! = k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Es gilt:

$$1! = 1, \quad 0! = 1.$$

Ziehen ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

- Ziehe Stichprobe vom Umfang n **ohne** Zurücklegen.
- $\Omega = \{\{\omega_1, \dots, \omega_n\} : \omega_j \in \{1, \dots, N\}, \omega_j \neq \omega_i \text{ für } j \neq i\}$
- Anzahl der möglichen Stichproben:

$$|\Omega| = \frac{N!}{(N - n)!n!} = \binom{N}{n}$$

Wiederholung Binomialkoeffizient: Der *Binomialkoeffizient* $\binom{N}{n}$ ist definiert als

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N - n)! \cdot n!}.$$

Es gilt:

$$\binom{N}{0} = 1, \quad \binom{N}{1} = N, \quad \binom{N}{N} = 1, \quad \binom{N}{n} = 0, \text{ falls } N < n.$$

1.2.3 Die „induktive Brücke“ I

1.2.4 Das Axiomensystem von Kolmogoroff (1933) und wichtige Rechenregeln

Definition 1.2 Eine Funktion P (P steht für Probability), die Ereignissen aus Ω reelle Zahlen zuordnet, heißt *Wahrscheinlichkeit*, wenn gilt

$$(K1) \quad P(A) \geq 0 \text{ für alle Ereignisse } A \subset \Omega.$$

$$(K2) \quad P(\Omega) = 1.$$

$$(K3) \quad \text{Falls } A \cap B = \emptyset, \text{ dann gilt } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Für beliebige Mengen A, B gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Falls A_1, A_2, \dots, A_n paarweise disjunkt sind, also $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, dann gilt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Vollständige Zerlegung: Ist A_1, A_2, \dots, A_k eine *vollständige Zerlegung* von Ω , d.h. gilt

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = \Omega \text{ und } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j,$$

so gilt für jedes Ereignis B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^k P(B \cap A_i).$$

1.2.5 Grundlegendes zum Begriff „Wahrscheinlichkeit“

1.3 Stochastische Unabhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeiten

1.3.1 Stochastische Unabhängigkeit

Definition 1.3 Zwei Ereignisse A und B heißen (*stochastisch*) *unabhängig*, wenn gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

andernfalls heißen sie *stochastisch abhängig*.

Definition 1.4 Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n heißen (vollständig) stochastisch unabhängig, wenn für alle $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ gilt

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Achtung: Aus der paarweisen Unabhängigkeit

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad \text{für alle } i, j$$

folgt nicht die vollständige Unabhängigkeit.

1.3.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition 1.5 Gegeben seien zwei Ereignisse A und B mit $P(B) > 0$. Dann heißt:

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B oder *bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B*.

1.3.3 Koppelung unabhängiger Experimente (unabhängige Wiederholungen)

Unabhängige Koppelung mehrerer Experimente: Gegeben sei eine Menge von Zufallsexperimenten, beschrieben durch die Ergebnisräume Ω_i , $i = 1, \dots, n$ und die Wahrscheinlichkeitsbewertungen P_i , $i = 1, \dots, n$. Fasst man die Experimente zusammen, so ergibt sich der Ergebnisraum

$$\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$$

mit den Elementen

$$\omega := (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n).$$

Sind die Experimente unabhängig (Dies ist inhaltlich zu entscheiden!), so setzt man für beliebige $A_i \subset \Omega_i$, $i = 1, \dots, n$,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2) \cdot \dots \cdot P_n(A_n).$$

Dies beschreibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω , bei dem – per Konstruktion – beliebige Ereignisse aus den einzelnen Ω_i voneinander unabhängig sind.

1.3.4 Koppelung abhängiger Experimente

Satz 1.6 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit) Gegeben sei eine vollständige Zerlegung A_1, A_2, \dots, A_k von Ω . Dann gilt für jedes Ereignis B

$$P(B) = \sum_{j=1}^k P(B|A_j) \cdot P(A_j) = \sum_{j=1}^k P(B \cap A_j).$$

Koppelung abhängiger Experimente: Gegeben seien n Experimente, beschrieben durch die Grundräume $\Omega_i = \{a_{i1}, \dots, a_{ik_i}\}$ und die Wahrscheinlichkeitsbewertungen $P_i, i = 1, \dots, n$. Bezeichnet man für beliebiges $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, k_i$, mit A_{ij} jeweils das zu a_{ij} gehörige Elementarereignis (also das Ereignis „ a_{ij} tritt ein“), so gilt:

$$P(A_{1j_1} \cap A_{2j_2} \cap \dots \cap A_{nj_n}) = P_1(A_{1j_1}) \cdot P_2(A_{2j_2}|A_{1j_1}) \cdot P_3(A_{3j_3}|A_{1j_1} \cap A_{2j_2}) \\ \cdot \dots \cdot P_n(A_{nj_n}|A_{1j_1} \cap A_{2j_2} \cap \dots \cap A_{n-1j_{n-1}})$$

Häufig werden die Indizes bei P weggelassen.

Korollar 1.7 Sei A_1, A_2, \dots, A_k eine vollständige Zerlegung. Dann gilt für beliebige Ereignisse B und C mit $P(C) > 0$

$$P(B|C) = \sum_{j=1}^k P(B|(A_j \cap C)) \cdot P(A_j|C)$$

Markovmodelle

Hier interpretiert man den Laufindex als Zeit. Gilt in der Koppelung abhängiger Experiment $\Omega_1 = \Omega_2 = \dots = \Omega_n = \{a_1, \dots, a_k\}$ und sind alle bedingten Wahrscheinlichkeiten nur vom jeweils unmittelbar vorhergehenden Zeitpunkt abhängig, d.h. gilt

$$P(A_{i+1,j_{i+1}}|A_{1j_1} \cap A_{2j_2} \cap \dots \cap A_{ij_i}) = P(A_{i+1,j_{i+1}}|A_{ij_i}), \quad (*)$$

so spricht man von einem *Markovmodell mit den Zuständen* a_1, \dots, a_k .

Sind die sogenannten *Übergangswahrscheinlichkeiten* in (*) unabhängig von der Zeit, gilt also $P(A_{i+1,j}|A_{il}) \equiv p_{jl}$ für alle i, j, l , so heißt das Markovmodell *homogen*.

1.3.5 Das Theorem von Bayes

Satz 1.8 Sei A_1, \dots, A_k eine vollständige Zerlegung von Ω , wobei $P(A_i) > 0$, $P(B|A_i) > 0$, $i = 1, \dots, k$ und $P(B) > 0$ erfüllt seien. Dann gilt

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^k P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

1.4 Zufallsvariablen und ihre Verteilung

1.4.1 Diskrete Zufallsvariablen

Definition 1.9 Gegeben seien ein diskreter, d.h. höchstens abzählbarer, Ergebnisraum Ω und die Wahrscheinlichkeit P auf Ω . Jede Abbildung

$$\begin{aligned} X : \Omega &\mapsto \Omega_X \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

heißt *Zufallselement*. Setzt man für jede *Realisation* $x \in \Omega_X$

$$P_X(\{x\}) := P(\{X = x\}) := P(\{\omega | X(\omega) = x\})$$

so erhält man eine Wahrscheinlichkeit auf Ω_X . (Oft wird auch $P(X = x)$ statt $P(\{X = x\})$ geschrieben.)

Definition 1.10 Gegeben sei eine diskrete Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung P . Die Menge

$$\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R} | P(\{x\}) > 0\}$$

heißt *Träger von X* .

Definition 1.11 Die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* $f(x)$ einer diskreten Zufallsvariable X ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) = p_i, & x = x_i \in \mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

1.4.2 Verteilungsfunktion

Definition 1.12 Sei X eine Zufallsvariable. Die Funktion

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\mapsto [0; 1] \\ x &\mapsto F(x) \end{aligned}$$

$$F(x) := P(X \leq x)$$

heißt *Verteilungsfunktion*.

Satz 1.13 Für beliebige reelle Zahlen a und b mit $a < b$ gilt: $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Satz 1.14 Unter Regularitätsbedingungen gilt: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X kann man durch die Verteilungsfunktion eindeutig erklären.

1.4.3 Stetige Zufallsvariablen

Definition 1.15 Gegeben sei eine stetige Zufallsvariable X mit differenzierbarer Verteilungsfunktion $F(x)$. Dann heißt die Ableitung von $F(x)$ nach x , also

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

Dichte der Zufallsvariablen X .

Satz 1.16 In der Situation der obigen Definition gilt

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

und damit für beliebige reelle Zahlen a und b mit $a < b$

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a < X \leq b) = P(a < X < b) \\ &= P(a \leq X < b) \\ &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Jede Funktion f auf \mathbb{R} mit $f(x) \geq 0$ für alle x und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

kann als Dichte verwendet werden.

Alternative Definition: Eine Zufallsvariable X heißt stetig, wenn es eine Funktion $f(x) \geq 0$ gibt, so dass für jedes Intervall $[a, b]$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

gilt.

1.4.4 Lebensdauern; Hazardrate und Survivorfunktion

Satz 1.17 Die Verteilung einer nicht negativen, stetigen Zufallsvariable X wird eindeutig durch sowohl die *Überlebensfunktion* (Survivorfunktion)

$$S(x) := P(X \geq x),$$

als auch durch die *Hazardrate*

$$\lambda(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x+h | X \geq x)}{h}$$

beschrieben.

Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
 S(x) &= 1 - F(x) \\
 S(x) &= \exp\left(-\int_0^x \lambda(u) du\right) \\
 F(x) &= 1 - \exp\left(-\int_0^x \lambda(u) du\right) \\
 f(x) &= \lambda(x) \cdot S(x)
 \end{aligned}$$

1.4.5 Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition 1.18 Zwei Zufallsvariablen X und Y mit den Verteilungsfunktionen F_X und F_Y heißen *stochastisch unabhängig*, falls für alle x und y gilt

$$P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = P(\{X \leq x\}) \cdot P(\{Y \leq y\}) = F_X(x) \cdot F_Y(y),$$

andernfalls heißen sie stochastisch abhängig.

1.5 Erwartungswert und Varianz

1.5.1 Diskrete Zufallsvariablen

Definition 1.19 Gegeben sei eine diskrete Zufallsvariable X mit Träger \mathcal{X} . Dann heißt

$$\mathbb{E} X := \mathbb{E}(X) := \mathbb{E}(X) := \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot P(X = x)$$

Erwartungswert von X ,

$$\begin{aligned}
 \text{Var } X &:= \text{Var}(X) := \mathbb{V}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\
 &= \sum_{x \in \mathcal{X}} (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot P(X = x)
 \end{aligned}$$

Varianz von X und

$$\sigma_X := \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Standardabweichung von X .

Zur Berechnung der Varianz ist der sogenannte *Verschiebungssatz* sehr praktisch:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E} X)^2$$

1.5.2 Stetige Zufallsvariablen

Definition 1.20 Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte $f(x)$. Dann heißt

$$E X := E(X) := \mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Erwartungswert von X ,

$$\begin{aligned} \text{Var } X &:= \text{Var}(X) := \mathbb{V}(X) := E((X - E(X))^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

Varianz von X und

$$\sigma_X := \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Standardabweichung von X .

1.5.3 Allgemeine Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz

Satz 1.21 Seien X und Y diskrete oder stetige Zufallsvariablen (mit existierenden Erwartungswerten und Varianzen). Dann gilt:

a) $E(aX + bY) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$ und insbesondere auch

$$\begin{aligned} E(a) &= a, \\ E(aX) &= a \cdot E(X) \\ E(X + Y) &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

b) $\text{Var}(aX + b) = a^2 \cdot \text{Var}$.

Sind X und Y zusätzlich unabhängig, so gilt

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= E(X) \cdot E(Y) \\ \text{Var}(X + Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \end{aligned}$$

Definition 1.22 Die Zufallsvariable

$$Z := \frac{X - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$$

heißt *standardisierte Zufallsvariable*. Es gilt

$$E(Z) = 0 \quad \text{und} \quad \text{Var}(Z) = 1.$$

1.6 Wichtige Verteilungsmodelle

1.6.1 Binomialverteilung

Definition 1.23 Eine Zufallsvariable X heißt *binomialverteilt* mit dem Parametern π bei n Versuchen, kurz $X \sim B(n, \pi)$, wenn sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}, & x = 0, 1, \dots, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

Alternative Darstellung: Die Zufallsvariable X kann als

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

mit den binären Variablen

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ beim } i\text{-ten Versuch eintritt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

dargestellt werden. Die X_i seien stochastisch unabhängig mit $X_i \sim B(1, \pi)$. $B(1, \pi)$ heißt *Bernoulliverteilung*.

Erwartungswert und Varianz

- Erwartungswert der Binomialverteilung:

$$E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = n\pi$$

- Varianz der Binomialverteilung:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) = n\pi(1 - \pi)$$

Eigenschaften:

- Symmetrieeigenschaft:
Sei $X \sim B(n, \pi)$ und $Y = n - X$. Dann gilt $Y \sim B(n, 1 - \pi)$.
- Summeneigenschaft:
Seien $X \sim B(n, \pi)$ und $Y \sim B(m, \pi)$. Sind X und Y unabhängig, so gilt

$$X + Y \sim B(n + m, \pi).$$

1.6.2 Poisson-Verteilung

Definition 1.24 Eine Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & x = 0, 1, \dots, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt *Poisson-verteilt* mit Parameter (oder Rate) $\lambda > 0$, kurz $X \sim Po(\lambda)$.

Erwartungswert und Varianz

- Erwartungswert der Poissonverteilung:

$$E(X) = \lambda$$

- Varianz der Poissonverteilung:

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

Poisson-Verteilung als Näherungsmodell für die Binomialverteilung:

$$X \sim B(n, \pi) \xrightarrow[\substack{n \text{ groß} \\ \pi \text{ klein}}]{\implies} X \cong Po(n \cdot \pi)$$

Satz 1.25 (Addition von Poisson-verteilten Zufallsvariablen) Sind $X \sim Po(\lambda_X), Y \sim Po(\lambda_Y)$ voneinander unabhängig, so gilt

$$X + Y \sim Po(\lambda_X + \lambda_Y).$$

1.6.3 Normalverteilung

Definition 1.26 Eine stetige Zufallsvariable X heißt *normalverteilt* mit den Parametern μ und σ^2 , kurz $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wenn für ihre Dichte gilt :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

und *standardnormalverteilt*, in Zeichen $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$, falls $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ gilt (π ist hier die Kreiszahl $\pi = 3.14\dots$).

Wichtige Formeln

- Die *Dichte der Standardnormalverteilung* wird oft mit $\varphi(x)$ bezeichnet, also

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

und die zugehörige Verteilungsfunktion mit

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(u) du$$

- $\Phi(x)$ lässt sich nicht in geschlossener Form durch bekannte Funktionen beschreiben
 \implies numerische Berechnung, Tabellierung.
- μ und σ^2 sind genau der Erwartungswert und die Varianz, also, wenn $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann

$$E(X) = \mu \quad \text{und} \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

- Die Dichte ist symmetrisch um μ , d.h.

$$f(\mu - x) = f(\mu + x).$$

- Funktionswerte für negative Argumente::

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

- Abgeschlossenheit gegenüber Linearkombinationen:

Seien X_1 und X_2 unabhängig und $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$. Ferner seien b, a_1, a_2 feste reelle Zahlen. Dann gilt

$$Y_1 := a_1 X_1 + b \sim \mathcal{N}(a_1 \mu_1 + b; a_1^2 \sigma_1^2)$$

$$Y_2 := a_1 X_1 + a_2 X_2 \sim \mathcal{N}(a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2; a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2).$$

Standardisierung: Gilt $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, so ist die zugehörige standardisierte Zufallsvariable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

standardnormalverteilt.

1.7 Grenzwertsätze und Approximationen

1.7.1 Das i.i.d.-Modell

1.7.2 Das schwache Gesetz der großen Zahlen

Satz 1.27 (Theorem von Bernoulli) Seien X_1, \dots, X_n , i.i.d. mit $X_i \in \{0, 1\}$ und $P(X_i = 1) = \pi$. Dann gilt für

$$H_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

und jedes $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|H_n - \pi| \leq \epsilon) = 1$$

Schwaches Gesetz der großen Zahl: Gegeben seien X_1, \dots, X_n i.i.d. Zufallsvariablen mit (existierendem) Erwartungswert μ und (existierender) Varianz σ^2 . Dann gilt für

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

und beliebiges $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \leq \epsilon) = 1$$

Schreibweise:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

(„Stochastische Konvergenz“, „ X_n konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen μ “.)

1.7.3 Der Hauptsatz der Statistik

Satz 1.28 Seien X_1, \dots, X_n i.i.d. mit Verteilungsfunktion F und sei $F_n(x)$ die empirische Verteilungsfunktion der ersten n Beobachtungen. Mit

$$D_n := \sup_x |F_n(x) - F(x)|,$$

gilt für jedes $c > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n > c) = 0.$$

1.7.4 Der zentrale Grenzwertsatz

Satz 1.29 Seien X_1, \dots, X_n i.i.d. mit $E(X_i) = \mu$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 > 0$ sowie

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right).$$

Dann gilt: Z_n ist *asymptotisch standardnormalverteilt*, in Zeichen: $Z_n \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}(0; 1)$, d.h. es gilt für jedes z

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z).$$

Wichtige Anwendung: Approximation der Binomialverteilung

Sei $X \sim B(n, \pi)$. Falls n groß genug ist, gilt:

$$P(X \leq x) \approx \Phi \left(\frac{x - n \cdot \pi}{\sqrt{n \cdot \pi(1 - \pi)}} \right).$$

Stetigkeitskorrektur:

$$P(X \leq x) \approx \Phi \left(\frac{x + 0.5 - n\pi}{\sqrt{n\pi(1 - \pi)}} \right)$$

$$P(X = x) \approx \Phi \left(\frac{x + 0.5 - n\pi}{\sqrt{n\pi(1 - \pi)}} \right) - \Phi \left(\frac{x - 0.5 - n\pi}{\sqrt{n\pi(1 - \pi)}} \right)$$

Es gibt verschiedene Faustregeln, ab wann diese Approximation gut ist, z.B.

$$\begin{aligned} n \cdot \pi &\geq 5 \quad \text{und} \quad n \cdot (1 - \pi) \geq 5 \\ n \cdot \pi(1 - \pi) &\geq 9 \end{aligned}$$

1.8 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Definition 1.30 Betrachtet werden zwei eindimensionale diskrete Zufallselemente X und Y (zu demselben Zufallsexperiment). Die Wahrscheinlichkeit

$$P(X = x_i, Y = y_j) := P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$$

in Abhängigkeit von x_i und y_j ($i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, m$) heißt *gemeinsame Verteilung* der mehrdimensionalen Zufallsvariable $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ bzw. der Variablen X und Y ($i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, m$).

Randwahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} p_{i\bullet} = P(X = x_i) &= \sum_{j=1}^m P(X = x_i, Y = y_j) \\ p_{\bullet j} = P(Y = y_j) &= \sum_{i=1}^k P(X = x_i, Y = y_j) \end{aligned}$$

Bedingte Verteilungen:

$$\begin{aligned} P(X = x_i | Y = y_j) &= \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \\ P(Y = y_j | X = x_i) &= \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} \end{aligned}$$

Definition 1.31 Seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Dann heißt

$$\sigma_{X,Y} := \text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Kovarianz von X und Y .

Rechenregeln:

- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
- $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$ (Verschiebungssatz)
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- Mit $\tilde{X} = a_X X + b_X$ und $\tilde{Y} = a_Y Y + b_Y$ ist

$$\text{Cov}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = a_X \cdot a_Y \cdot \text{Cov}(X, Y)$$

- $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \cdot \text{Cov}(X, Y)$

Definition 1.32 Zwei Zufallsvariablen X und Y mit $\text{Cov}(X, Y) = 0$ heißen *unkorreliert*.

Satz 1.33 Stochastisch unabhängige Zufallsvariablen sind unkorreliert. Die Umkehrung gilt jedoch im Allgemeinen nicht.

Definition 1.34 Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y . Dann heißt

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

Korrelationskoeffizient von X und Y .

Eigenschaften des Korrelationskoeffizienten

- Mit $\tilde{X} = a_X X + b_X$ und $\tilde{Y} = a_Y Y + b_Y$ ist

$$|\rho(\tilde{X}, \tilde{Y})| = |\rho(X, Y)|.$$

- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.
- $|\rho(X, Y)| = 1 \iff Y = aX + b$
- Sind $\text{Var}(X) > 0$ und $\text{Var}(Y) > 0$, so gilt $\rho(X, Y) = 0$ genau dann, wenn $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

2 Induktive Statistik

2.1 Grundprinzipien der induktiven Statistik

2.2 Punktschätzung

2.2.1 Schätzfunktionen

Definition 2.1 Sei X_1, \dots, X_n i.i.d. Stichprobe. Eine Funktion

$$T = g(X_1, \dots, X_n)$$

heißt *Schätzer* oder *Schätzfunktion*.

Andere Notation in der Literatur: $\hat{\vartheta}$ Schätzer für ϑ .

2.2.2 Gütekriterien

Erwartungstreue, Bias: Gegeben sei eine Stichprobe X_1, \dots, X_n und eine Schätzfunktion $T = g(X_1, \dots, X_n)$ (mit existierendem Erwartungswert).

- T heißt *erwartungstreu für den Parameter ϑ* , falls gilt

$$E_{\vartheta}(T) = \vartheta$$

für alle ϑ .

- Die Größe

$$\text{Bias}_{\vartheta}(T) = E_{\vartheta}(T) - \vartheta$$

heißt *Bias* (oder *Verzerrung*) der Schätzfunktion. Erwartungstreue Schätzfunktionen haben per Definition einen Bias von 0.

- Die korrigierte Stichprobenvarianz

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n}{n-1} (\bar{X})^2$$

ist erwartungstreu für σ^2 .

2.2.3 Effizienz

Effizienz

- Gegeben seien zwei erwartungstreue Schätzfunktionen T_1 und T_2 für einen Parameter ϑ . Gilt

$$\text{Var}_{\vartheta}(T_1) \leq \text{Var}_{\vartheta}(T_2) \text{ für alle } \vartheta$$

und

$$\text{Var}_{\vartheta^*}(T_1) < \text{Var}_{\vartheta^*}(T_2) \text{ für mindestens ein } \vartheta^*$$

so heißt T_1 *effizienter als* T_2 .

- Eine für ϑ erwartungstreue Schätzfunktion T heißt *UMVU-Schätzfunktion* für ϑ (uniformly minimum variance unbiased), falls

$$\text{Var}_{\vartheta}(T) \leq \text{Var}_{\vartheta}(T^*)$$

für alle ϑ und für alle erwartungstreuen Schätzfunktionen T^* .

MSE

$$\text{MSE}_{\vartheta}(T) := \text{E}_{\vartheta}(T - \vartheta)^2 = \text{Var}_{\vartheta}(T) + (\text{Bias}_{\vartheta}(T))^2$$

2.2.4 Asymptotische Gütekriterien

- **Asymptotische Erwartungstreue**

Eine Schätzfunktion heißt *asymptotisch erwartungstreu*, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{E}(\hat{\vartheta}) = \vartheta$$

bzw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Bias}(\hat{\vartheta}) = 0$$

gelten.

- Ein Schätzer heißt *(MSE-)konsistent* oder *konsistent im quadratischen Mittel*, wenn gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{MSE}(T)) = 0.$$

2.2.5 Konstruktionsprinzipien guter Schätzer

Die Methode der kleinsten Quadrate

Das Maximum-Likelihood-Prinzip

Definition 2.2 Gegeben sei die Realisation x_1, \dots, x_n einer i.i.d. Stichprobe. Die Funktion in ϑ

$$L(\vartheta | x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n P_{\vartheta}(X_i = x_i) & \text{falls } X_i \text{ diskret} \\ \prod_{i=1}^n f_{\vartheta}(x_i) & \text{falls } X_i \text{ stetig.} \end{cases}$$

heißt *Likelihood* des Parameters ϑ bei der Beobachtung x_1, \dots, x_n .

Derjenige Wert $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n)$, der $L(\vartheta)$ maximiert, heißt *Maximum-Likelihood-Schätzwert*; die zugehörige Schätzfunktion $T(X_1, \dots, X_n)$ *Maximum-Likelihood-Schätzer*.

Praktische Berechnung

Für die praktische Berechnung maximiert man statt der Likelihood typischerweise die Log-Likelihood

$$l(\vartheta|x_1, \dots, x_n) = \ln(L(\vartheta)) = \ln \prod_{i=1}^n P_{\vartheta}(X_i = x_i) = \sum_{i=1}^n \ln P_{\vartheta}(X_i = x_i)$$

bzw.

$$l(\vartheta|x_1, \dots, x_n) = \ln \prod_{i=1}^n f_{\vartheta}(x_i) = \sum_{i=1}^n \ln f_{\vartheta}(x_i).$$

2.3 Intervallschätzung

2.3.1 Motivation und Hinführung

2.3.2 Konfidenzintervalle: Definition

Definition 2.3 Gegeben sei eine i.i.d. Stichprobe X_1, \dots, X_n zur Schätzung eines Parameters ϑ und eine Zahl $\gamma \in (0; 1)$. Ein zufälliges Intervall $\mathcal{C}(X_1, \dots, X_n)$ heißt *Konfidenzintervall* zum *Sicherheitsgrad* γ (Konfidenzniveau γ), falls für jedes ϑ gilt:

$$P_{\vartheta}(\vartheta \in \underbrace{\mathcal{C}(X_1, \dots, X_n)}_{\text{zufälliges Intervall}}) \geq \gamma.$$

2.3.3 Konfidenzintervallen: Konstruktion

Praktische Vorgehensweise: Suche Zufallsvariable Z_{ϑ} , die

- den gesuchten Parameter ϑ enthält und
- deren Verteilung aber nicht mehr von dem Parameter abhängt, („Pivotgröße“, dt. An- gelpunkt).
- Dann wähle den Bereich C_Z so, dass $P_{\vartheta}(Z_{\vartheta} \in C_Z) = \gamma$ und
- löse nach ϑ auf.

Konfidenzintervall für den Mittelwert eines normalverteilten Merkmals

- bei bekannter Varianz:

$$\left[\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[\bar{X} \pm z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- bei unbekannter Varianz:

$$\left[\bar{X} \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

Definition 2.4 (t-Verteilung) Gegeben sei eine i.i.d. Stichprobe X_1, \dots, X_n mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann heißt die Verteilung von

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \cdot \sqrt{n}$$

t-Verteilung (oder Student-Verteilung) mit $\nu = n - 1$ Freiheitsgraden. In Zeichen: $Z \sim t(\nu)$.

2.3.4 Approximatives Konfidenzintervall für den Anteil π eines binomialverteilten Merkmals

Seien X_1, \dots, X_n i.i.d. mit $X_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ und $P(X_i = 1) = \pi$.

Dann gilt approximativ für großes n

$$\frac{\bar{X} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}}} \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

und damit für das Konfidenzintervall:

$$\left[\bar{X} \pm z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \right].$$

2.3.5 Bestimmung des Stichprobenumfangs für die Anteilsschätzung

γ : Konfidenzniveau

b_{\max} : Schranke für die Genauigkeit

$$z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \leq b_{\max}$$

Auflösen nach n :

$$n \geq \frac{1}{b_{\max}^2} z_{\frac{1+\gamma}{2}}^2 \cdot \bar{X}(1-\bar{X})$$

2.4 Hypothesentests

2.4.1 Grundprinzipien statistischer Hypothesentests

2.4.2 Konstruktion eines parametrischen statistischen Tests

2.4.3 Typische Tests I: Tests auf Lageparameter

Gauß-Test

- Situation: X_1, \dots, X_n i.i.d. Stichprobe, wobei X_i jeweils normalverteilt sei mit unbekanntem Mittelwert μ und bekannter Varianz σ^2 .

- Statistische Hypothesen:

Fall 1: $H_0: \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1: \mu > \mu_0$

Fall 2: $H_0: \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1: \mu < \mu_0$

Fall 3: $H_0: \mu = \mu_0$ gegen $H_1: \mu \neq \mu_0$

- Testgröße:

$$T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

Falls $\mu = \mu_0$ gilt:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- Kritische Region:

– Fall 1: H_0 ablehnen, falls:

$$T \geq z_{1-\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \bar{X} \in \left[\mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \infty \right)$$

– Fall 2: H_0 ablehnen, falls:

$$T \leq -z_{1-\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \bar{X} \in \left(-\infty; \mu_0 - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

– Fall 3: H_0 ablehnen, falls:

$$T \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{oder} \quad T \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{also} \quad |T| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

t-Test

- Situation: X_1, \dots, X_n i.i.d. Stichprobe, wobei X_i jeweils normalverteilt sei mit unbekanntem Mittelwert μ und *unbekannter* Varianz σ^2

- Statistische Hypothesen:

Fall 1: $H_0: \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1: \mu > \mu_0$

Fall 2: $H_0: \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1: \mu < \mu_0$

Fall 3: $H_0: \mu = \mu_0$ gegen $H_1: \mu \neq \mu_0$

- Testgröße:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$$

Falls $\mu = \mu_0$ gilt:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \sim t(n-1)$$

- Kritische Region:

– Fall 1: H_0 ablehnen, falls $T \geq t_{1-\alpha}(n-1)$

– Fall 2: H_0 ablehnen, falls $T \leq -t_{1-\alpha}(n-1)$

– Fall 3: H_0 ablehnen, falls $T \leq -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ oder $T \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

Approximative Tests für Hypothesen über Anteilswerte

- Situation: X_1, \dots, X_n i.i.d. Stichprobe, wobei $X_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ gelte und $P(X_i = 1) = \pi$ unbekannt sei.
- Statistische Hypothesen:

Fall 1: $H_0: \pi \leq \pi_0$ gegen $H_1: \pi > \pi_0$

Fall 2: $H_0: \pi \geq \pi_0$ gegen $H_1: \pi < \pi_0$

Fall 3: $H_0: \pi = \pi_0$ gegen $H_1: \pi \neq \pi_0$

- Testgröße:

$$\frac{\bar{X} - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$$

Falls $\pi = \pi_0$ gilt:

$$\frac{\bar{X} - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}(0, 1),$$

- Kritische Region:
 - Fall 1: H_0 ablehnen, falls $T \geq z_{1-\alpha}$
 - Fall 2: H_0 ablehnen, falls $T \leq -z_{1-\alpha}$
 - Fall 3: H_0 ablehnen, falls $T \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ oder $T \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

2.4.4 Typische Tests II: Lagevergleiche aus unabhängigen Stichproben

X_1, \dots, X_n i.i.d. Stichprobe aus Gruppe A, Y_1, \dots, Y_m i.i.d. Stichprobe aus Gruppe B

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X; \sigma_X^2) \quad Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_Y; \sigma_Y^2).$$

Statistische Hypothesen:

$$\text{Fall 1: } H_0: \mu_X \leq \mu_Y \text{ gegen } H_1: \mu_X > \mu_Y$$

$$\text{Fall 2: } H_0: \mu_X \geq \mu_Y \text{ gegen } H_1: \mu_X < \mu_Y$$

$$\text{Fall 3: } H_0: \mu_X = \mu_Y \text{ gegen } H_1: \mu_X \neq \mu_Y$$

Zwei-Stichproben-Gauß-Test

Die Varianzen σ_X^2 und σ_Y^2 werden als bekannt angenommen.

- Testgröße:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$

Falls $\mu_X = \mu_Y$ ist, gilt

$$T \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Kritische Region:

– Fall 1: H_0 ablehnen, falls $T \geq z_{1-\alpha}$

– Fall 2: H_0 ablehnen, falls $T \leq -z_{1-\alpha}$

– Fall 3: H_0 ablehnen, falls $T \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ oder $T \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Zwei-Stichproben- t -Test

Die Varianzen σ_X^2 und σ_Y^2 seien unbekannt.

- **Variante I**

Ist bekannt, dass die Varianzen gleich sind, so schätzt man sie mittels S_X^2 und S_Y^2 .

Testgröße:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}}}$$

Falls $\mu_X = \mu_Y$ gehorcht T einer t -Verteilung mit $(n + m - 2)$ Freiheitsgraden.

Kritische Region:

– Fall 1: H_0 ablehnen, falls $T \geq t_{1-\alpha}(n + m - 2)$

– Fall 2: H_0 ablehnen, falls $T \leq -t_{1-\alpha}(n + m - 2)$

– Fall 3: H_0 ablehnen, falls $T \leq -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n + m - 2)$ oder $T \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n + m - 2)$

• **Variante II**

Können die Varianzen nicht als gleich angenommen werden, so kann für großes n und großes m mit folgender Testgröße gerechnet werden:

Testgröße:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}}$$

T ist für $\mu_X = \mu_Y$ approximativ standardnormalverteilt und kann auch angewendet werden, wenn keine Normalverteilung vorliegt.

Kritische Region:

- Fall 1: H_0 ablehnen, falls $T \geq z_{1-\alpha}$
- Fall 2: H_0 ablehnen, falls $T \leq -z_{1-\alpha}$
- Fall 3: H_0 ablehnen, falls $T \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ oder $T \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

2.4.5 Gauß-Test und t -Test für verbundene Stichproben

Verbundene Stichproben: Vergleich zweier Merkmale X und Y , die jetzt an *denselben* Einheiten erhoben werden.

$$\begin{aligned} X_1, \dots, X_n & \text{ i.i.d. } \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y_1, \dots, Y_n & \text{ i.i.d. } \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{aligned}$$

Zum Testen von Hypothesen der Form

$$\begin{aligned} \text{Fall 1} \quad H_0: \mu_X \leq \mu_Y & \text{ gegen } H_1: \mu_X > \mu_Y \\ \text{Fall 2} \quad H_0: \mu_X \geq \mu_Y & \text{ gegen } H_1: \mu_X < \mu_Y \\ \text{Fall 3} \quad H_0: \mu_X = \mu_Y & \text{ gegen } H_1: \mu_X \neq \mu_Y \end{aligned}$$

betrachtet man die Differenz $D_i = X_i - Y_i$. Für den Erwartungswert μ_D gilt

$$\mu_D = E(D_i) = \mu_X - \mu_Y$$

und für die Varianz σ_D^2

$$\sigma_D^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY} \quad \text{mit } \sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y)$$

Wegen $D_i \sim \mathcal{N}(\mu_D, \sigma_D^2)$ mit $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$ und $\sigma_D^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}$ sind obige Hypothesen äquivalent zu den Hypothesen

$$\begin{aligned} \text{Fall 1'} \quad H_0: \mu_D \leq 0 & \text{ gegen } H_1: \mu_D > 0 \\ \text{Fall 2'} \quad H_0: \mu_D \geq 0 & \text{ gegen } H_1: \mu_D < 0 \\ \text{Fall 3'} \quad H_0: \mu_D = 0 & \text{ gegen } H_1: \mu_D \neq 0, \end{aligned}$$

und man kann unmittelbar die Tests aus 2.4.3 anwenden. Sind die Varianzen unbekannt, so kann man σ_D aus den Differenzen D_i , $i = 1, \dots, n$ schätzen. Zur Prüfung ist dann die t -Verteilung heranzuziehen.

2.4.6 χ^2 -Tests am Beispiel des χ^2 -Unabhängigkeitstests

χ^2 -Unabhängigkeitstest

$(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ i.i.d. Stichprobe des zwei-dimensionalen Merkmals (X, Y) .

- Statistische Hypothesen:

H_0 : Es herrscht Unabhängigkeit.

H_1 : Es herrscht keine Unabhängigkeit.

d.h. H_0 : $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$ für alle Paare i, j

gegen H_1 : $P(X = x_i, Y = y_j) \neq P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$ für mindestens ein Paar i, j

- Teststatistik:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \frac{\left(h_{ij} - \frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n}\right)^2}{\frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n}} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n \cdot \frac{\left(\frac{h_{ij}}{n} - \frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n^2}\right)^2}{\frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n^2}} \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n \cdot \frac{(f_{ij} - f_{i\bullet} f_{\bullet j})^2}{f_{i\bullet} f_{\bullet j}} \end{aligned}$$

Unter H_0 gehorcht T approximativ einer sogenannten χ^2 Verteilung mit $(k-1) \cdot (m-1)$ Freiheitsgraden.

- Kritische Region:

H_0 ablehnen, falls

$$T > \chi_{1-\alpha}^2((k-1) \cdot (m-1)),$$

wobei $\chi_{1-\alpha}^2((k-1) \cdot (m-1))$ das $(1-\alpha)$ -Quantil der χ^2 -Verteilung mit $(k-1)(m-1)$ Freiheitsgraden bezeichnet.

2.4.7 Zur praktischen Anwendung statistischer Tests

Testentscheidungen und Statistik-Software, p -Wert

Dualität von Test und Konfidenzintervall

Signifikanz versus Relevanz

Multiple Testprobleme

Nichtparametrische Tests

2.5 Lineare Regressionsmodelle

2.5.1 Wiederholung aus Statistik I

2.5.2 Lineare Einfachregression

Statistische Sichtweise

- Wahres Modell: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$
- Gestört durch zufällige Fehler ϵ_i : Beobachtung von Datenpaaren (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$ mit

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \quad \text{wobei}$$

- $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
- σ^2 für alle i gleich
- $\epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}$ stochastisch unabhängig für $i_1 \neq i_2$

Maximum Likelihood Schätzer

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X},$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2 \quad \text{mit den geschätzten Residuen } \hat{\epsilon}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i$$

Konstruktion von Konfidenzintervallen und Tests

Mit

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} := \frac{\hat{\sigma} \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \quad \text{gilt} \quad \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \sim t(n-2)$$

und analog mit

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} := \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \quad \text{gilt} \quad \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \sim t(n-2).$$

- Konfidenzintervalle zum Sicherheitsgrad γ :

$$\text{für } \beta_0: \quad [\hat{\beta}_0 \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} \cdot t_{1+\frac{\gamma}{2}}(n-2)]$$

$$\text{für } \beta_1: \quad [\hat{\beta}_1 \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \cdot t_{1+\frac{\gamma}{2}}(n-2)]$$

- Hypothesen und kritischen Region:

	Hypothesen	kritische Region
Fall 1:	$H_0: \beta_1 \leq \beta_1^*$ gegen $\beta_1 > \beta_1^*$	$T_{\beta_1^*} \geq t_{1-\alpha}(n-2)$
Fall 2:	$H_0: \beta_1 \geq \beta_1^*$ gegen $\beta_1 < \beta_1^*$	$T_{\beta_1^*} \leq t_{1-\alpha}(n-2)$
Fall 3:	$H_0: \beta_1 = \beta_1^*$ gegen $\beta_1 \neq \beta_1^*$	$ T_{\beta_1^*} \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$

mit der Teststatistik

$$T_{\beta_1^*} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^*}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$$

(analog für $\hat{\beta}_0$).

Typischer SPSS-OutputKoeffizienten^a

			Standardisierte Koeffizienten	<i>T</i>	Signifikanz
	β	Standardfehler	Beta		
Konstante	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}$	5)	1)	3)
Unabhängige Variable	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$	6)	2)	4)

^a abhängige Variable

1) Wert der Teststatistik

$$T_{\beta_0^*} = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$$

zum Testen von $H_0: \beta_0 = 0$ gegen $H_1: \beta_0 \neq 0$.

2) Analog: Wert von

$$T_{\beta_1^*} = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$$

zum Testen von $H_0: \beta_1 = 0$ gegen $H_1: \beta_1 \neq 0$.

3) p-Wert zu 1)

4) p-Wert zu 2)

5), 6) hier nicht von Interesse.

2.5.3 Multiple lineare Regression

- Modellierungsansatz:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_p X_{ip} + \epsilon_i$$

- Es gilt für jedes $j = 0, \dots, p$

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \sim t(n - p - 1)$$

und man erhält wieder Konfidenzintervalle für β_j :

$$[\hat{\beta}_j \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} \cdot t_{1+\frac{\alpha}{2}}(n - p - 1)]$$

sowie entsprechende Tests.

2.5.4 Varianzanalyse (Analysis of Variance, ANOVA)

Beobachtungen: Y_{ij}

$$\begin{aligned} j = 1, \dots, J & \quad \text{Faktorstufen} \\ i = 1, \dots, n_j & \quad \text{Personenindex in der } j\text{-ten Faktorstufe} \end{aligned}$$

Zwei äquivalente Modellformulierungen:

- Modell in Mittelwertdarstellung:

$$Y_{ij} = \mu_j + \epsilon_{ij} \quad j = 1, \dots, J, i = 1, \dots, n_j,$$

mit

$$\begin{aligned} \mu_j & \quad \text{faktorspezifischer Mittelwert} \\ \epsilon_{ij} & \quad \text{zufällige Störgröße} \\ \epsilon_{ij} & \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \dots, \epsilon_{Jn_J} \text{ unabhängig.} \end{aligned}$$

Testproblem:

$$\begin{aligned} H_0: & \quad \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_J \\ \text{gegen } H_1: & \quad \mu_l \neq \mu_q \quad \text{für mindestens ein Paar } (l, q) \end{aligned}$$

- Modell in Effektdarstellung:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_j + \epsilon_{ij}$$

wobei α_j so, dass

$$\sum_{j=1}^J n_j \alpha_j = 0.$$

$$\begin{aligned} \mu & \quad \text{globaler Erwartungswert} \\ \alpha_j & \quad \text{Effekt in der } j\text{-ten Faktorstufe, faktorspezifische systematische Abweichung vom gemeinsamen Mittelwert } \mu \end{aligned}$$

Testproblem:

$$\begin{aligned} H_0: & \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_J = 0 \\ \text{gegen } H_1: & \quad \alpha_j \neq 0 \quad \text{für mindestens ein } j \end{aligned}$$

Die beiden Modelle sind äquivalent: setze $\mu_j := \mu + \alpha_j$.

Streuungszerlegung

Mittelwerte:

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{\bullet\bullet} & \text{ Gesamtmittelwert in der Stichprobe} \\ \bar{Y}_{\bullet j} & \text{ Mittelwert in der } j\text{-ten Faktorstufe}\end{aligned}$$

Es gilt (vgl. Statistik I) die Streuungszerlegung:

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2 = \underbrace{\sum_{j=1}^J n_j (\bar{Y}_{\bullet j} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2}_{SQE} + \underbrace{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{\bullet j})^2}_{SQR}$$

- Hypothesen:

$$\begin{aligned}H_0: & \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_J \\ \text{gegen } H_1: & \mu_l \neq \mu_q \text{ f\u00fcr mindestens ein Paar } (l, q)\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}H_0: & \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_J = 0 \\ \text{gegen } H_1: & \alpha_j \neq 0 \text{ f\u00fcr mindestens ein } j\end{aligned}$$

- Testgr\u00f6\u00dfe:

$$F = \frac{SQE/(J-1)}{SQR/(n-J)}$$

Falls H_0 wahr ist, ist T F -verteilt mit $(J-1)$ und $(n-J)$ Freiheitsgraden.

- Kritische Region:
 H_0 ablehnen, falls

$$T > F_{1-\alpha}(J-1, n-J),$$

mit dem entsprechenden $(1-\alpha)$ -Quantil der F -Verteilung mit $(J-1)$ und $(n-J)$ Freiheitsgraden.

Students t -Verteilung

Tabelliert sind die Quantile für n Freiheitsgrade.

Für das Quantil $t_{1-\alpha}(\nu)$ gilt $F(t_{1-\alpha}(\nu)) = 1 - \alpha$.

Links vom Quantil $t_{1-\alpha}(\nu)$ liegt die Wahrscheinlichkeitsmasse $1 - \alpha$.

Ablesebeispiel: $t_{0,99}(20) = 2.528$

Die Quantile für $0 < 1 - \alpha < 0.5$ erhält man aus $t_{\alpha}(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$

Approximation für $\nu > 30$:

$$t_{\alpha}(\nu) \approx z_{\alpha} \quad (z_{\alpha} \text{ ist das } (\alpha)\text{-Quantil der Standardnormalverteilung})$$

ν	0.6	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.3249	1.3764	3.0777	6.3138	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	0.2887	1.0607	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	22.327	31.599
3	0.2767	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	10.215	12.924
4	0.2707	0.9410	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	7.1732	8.6103
5	0.2672	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	5.8934	6.8688
6	0.2648	0.9057	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.2076	5.9588
7	0.2632	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.7853	5.4079
8	0.2619	0.8889	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	4.5008	5.0413
9	0.2610	0.8834	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.2968	4.7809
10	0.2602	0.8791	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.1437	4.5869
11	0.2596	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.0247	4.4370
12	0.2590	0.8726	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.9296	4.3178
13	0.2586	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.8520	4.2208
14	0.2582	0.8681	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.7874	4.1405
15	0.2579	0.8662	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.7328	4.0728
16	0.2576	0.8647	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.6862	4.0150
17	0.2573	0.8633	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.6458	3.9651
18	0.2571	0.8620	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.6105	3.9216
19	0.2569	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.5794	3.8834
20	0.2567	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.5518	3.8495
21	0.2566	0.8591	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.5272	3.8193
22	0.2564	0.8583	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.5050	3.7921
23	0.2563	0.8575	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.4850	3.7676
24	0.2562	0.8569	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.4668	3.7454
25	0.2561	0.8562	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.4502	3.7251
26	0.2560	0.8557	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.4350	3.7066
27	0.2559	0.8551	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.4210	3.6896
28	0.2558	0.8546	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.4082	3.6739
29	0.2557	0.8542	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.3962	3.6594
30	0.2556	0.8538	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.3852	3.6460
∞	0.2533	0.8416	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0903	3.2906

χ^2 -Verteilung

Tabelliert sind die Quantile für n Freiheitsgrade.

Für das Quantil $\chi_{1-\alpha,n}^2$ gilt $F(\chi_{1-\alpha,n}^2) = 1 - \alpha$.

Links vom Quantil $\chi_{1-\alpha,n}^2$ liegt die Wahrscheinlichkeitsmasse $1 - \alpha$.

Ablesebeispiel: $\chi_{0.95,10}^2 = 18.307$

Approximation für $n > 30$:

$$\chi_{\alpha}^2(n) \approx \frac{1}{2}(z_{\alpha} + \sqrt{2n-1})^2 \quad (z_{\alpha} \text{ ist das } 1 - \alpha\text{-Quantil der Standardnormalverteilung})$$

n	0.01	0.025	0.05	0.1	0.5	0.9	0.95	0.975	0.99
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.345
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.143	13.277
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.070	12.833	15.086
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.2390	1.6899	2.1674	2.8331	6.3458	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.987	18.307	20.483	23.209
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.341	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.340	18.549	21.026	23.337	26.217
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.340	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.339	21.064	23.685	26.119	29.141
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.339	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.338	23.542	26.296	28.845	32.000
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.085	16.338	24.769	27.587	30.191	33.409
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.865	17.338	25.989	28.869	31.526	34.805
19	7.6327	8.9065	10.117	11.651	18.338	27.204	30.144	32.852	36.191
20	8.2604	9.5908	10.851	12.443	19.337	28.412	31.410	34.170	37.566
21	8.8972	10.283	11.591	13.240	20.337	29.615	32.671	35.479	38.932
22	9.5425	10.982	12.338	14.041	21.337	30.813	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.689	13.091	14.848	22.337	32.007	35.172	38.076	41.638
24	10.856	12.401	13.848	15.659	23.337	33.196	36.415	39.364	42.980
25	11.524	13.120	14.611	16.473	24.337	34.382	37.652	40.646	44.314
26	12.198	13.844	15.379	17.292	25.336	35.563	38.885	41.923	45.642
27	12.879	14.573	16.151	18.114	26.336	36.741	40.113	43.195	46.963
28	13.565	15.308	16.928	18.939	27.336	37.916	41.337	44.461	48.278
29	14.256	16.047	17.708	19.768	28.336	39.087	42.557	45.722	49.588
30	14.953	16.791	18.493	20.599	29.336	40.256	43.773	46.979	50.892