Aufgabe 1

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int e^{\lambda x}\, dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} + C$

b) $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$

c) $\int \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + C$

d) $\int \sin(-x)\, dx = -\cos(-x) + C$

e) $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C \quad (x \neq 0).$

f) $\int \sqrt{a + b \cdot x}\, dx = \frac{2(a+b\cdot x)^{\frac{3}{2}}}{3b} + C$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden (eigentlichen bzw. uneigentlichen) Integrale

a) $\int\limits_{-1}^{0} e^{\lambda x} dx = \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right]_{-1}^{0} = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$

b) $\int\limits_{0}^{1} (\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma)\ dx = \left[\frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^2}{2} + \gamma x\right]_{o}^{1} = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma$

c) $\int\limits_{2}^{5} \frac{x-2}{x}\, dx = \int\limits_{2}^{5} 1 - \frac{2}{x}\, dx = [x - 2\ln x]_2^5 = 3 - 2\ln(\frac{5}{2})$

d) $\int\limits_{3}^{7} \frac{1}{\sqrt{x-3}}\, dx =$ (Achtung, uneigentliches Integral) $= \left[2\sqrt{x-3}\right]_3^7 = 2(\sqrt{4} - 0) = 4$

e) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx =$ (Achtung, uneigentliches Integral) $= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} -\frac{1}{x} \quad + 1 = 1$

Aufgabe 3

Ist die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ eine Stammfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$?

$F'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \neq \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ für z.B. $x = 2$. Somit ist F keine Stammfunktion von f.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie eine Gerade durch den Koordinatenursprung derart, dass die zwischen der Geraden und der Kurve der Funktion $f(x) = x^2$ eingeschlossene Fläche genau $\frac{1}{6}$ beträgt.

Die Gerade $g(x) = a \cdot x$ und die Parabel $f(x) = x^2$ schneiden sich bei $x_1 = 0$ und $x_2 = a$. Zwischen 0 und a liegt die Gerade g oberhalb der Kurve f. Für positive a folgt (für negative a wäre in analoger Weise eine Lösung konstruierbar):

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a g(x) - f(x)\, dx \\ &= \int_0^a ax - x^2\, dx \\ &= \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a \\ &= \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \\ &= \frac{a^3}{6}. \end{aligned}$$

Also muss $a = 1$ gewählt werden, damit die Fläche $\frac{1}{6}$ beträgt. (Natürlich kann auch $a = -1$ gewählt werden.)