Blatt 8 Notizen

Nr. 1

RW, Def 8.1:

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Punkt $x \in [a,b]$ heißt lokales Maximum von f, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x) \geq f(y)$ $\forall y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \varepsilon$. x heißt lokales Minimum von f, wenn x ein lokales Maximum von $(-f)$ ist.
Man nennt x ein globales Maximum (Minimum), falls

$$f(x) \geq (\leq) f(y) \quad \forall y \in [a,b].$$

a) Falsch

b) Falsch

c) Falsch

d) Falsch. (jede <u>stetige</u> Fkt. besitzt auf $[a,b]$ ein glob. Max & glob. Min)

e) Wahr

f) Falsch (siehe d, gleiche Begründung)

g) Falsch

h) Falsch

Nr. 2:

Maximum:

Notwendig: $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$ Hinreichend: $f''(x) < 0$ (& $f'(x) = 0$)

Minimum:

Notwendig: $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$ Hinreichend: $f''(x) > 0$ (& $f'(x) = 0$)

Zwischen zwei lokalen Minima einer stetigen Fkt liegt stets ein lokales Maximum (und umgekehrt)

a) $f(x) = \exp(x^2) \Rightarrow f'(x) = 2x \exp(x^2) \Rightarrow$ einzige Nullstelle bei $x = 0$.

Randstellen: $f(-1) = e$, $f(0) = 1$, $f(1) = e$. Globales und lokales Minimum bei $x = 0$ und globales und lokales Maximum bei $x = -1$ und $x = 1$.

b) $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow$ keine Nullstelle. $f(-1) = -1$; $f(1) = 1$ $\Rightarrow$ globales Minimum bei $x = -1$ und globales Maximum bei $x = 1$.

c) $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow x = 0$ (Nullstelle). Mit $f'(-1) = f'(1) = 3$ und damit, dass es nur eine Nullstelle gibt, ist f' auf $[-1, 1]$ nichtnegativ, also kein lokales Extremum bei $x = 0$.

Globales Minimum: $x = -1$; globales Maximum: $x = 1$.

d) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$. Nst. bei $x = 0$. Da $f'(-1) = -4$ und $f'(1) = 4$ liegt bei $x = 0$ ein lokales Minimum vor, was auch global ist, da $f(-1) = 1$ und $f(1) = 1$. Globales Maximum bei $x = -1$ und $x = 1$.

Nr. 3

RW, Satz 8.5 Monotonie

Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann:

- f ist genau dann monoton steigend (fallend), wenn $\forall x \in (a,b)$: $f'(x) \geq (\leq) 0$.

- f ist streng monoton steigend (fallend), wenn $\forall x \in (a,b)$: $f'(x) > (<) 0$

a) $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}: x \mapsto \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} > 0$
streng monoton wachsend

b) $g: [20,\infty) \to \mathbb{R}: x \mapsto x^2 \exp(-x)$
$\Rightarrow g'(x) = 2x \exp(-x) - x^2 \exp(-x)$
$= (2-x)(x\exp(-x)) < 0 \Rightarrow$ str. mon. fallend.

Nr. 4

Konvex: $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbare Funktion:
f ist konvex $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$. streng konvex: $f''(x) > 0$

Konkav: $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar:
f ist konkav $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ - streng konkav: $f''(x) < 0$.

Nr. 4

$G(x) = px - c(x) = px - \alpha x^2 - \beta x - \gamma$

$G'(x) = p - c'(x) = p - 2x\alpha - \beta$

$G''(x) = -2\alpha < 0$. G strikt konkav.

zu Nr. 2 b):

$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \overset{!}{=} 0$. Keine Nullstelle für ~~cos~~ $f'(x)$, kein Extrempunkt in $[-1, 1]$. Globales Minimum bei $x = -1$, globales Maximum bei $x = 1$.