Blatt 6 Notizen

Stetigkeit: Eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn für jede Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ auch gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$, notiert als $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Auch möglich:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

Nr. 1

a) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow$ stetig

b) Nach a), einzige kritische Stelle bei $x = 0$.

$x_n \to 0 \Rightarrow |x_n| \to 0 = |0| \Rightarrow$ stetig.

c) stetig

d) stetig

e) nicht stetig

Nr. 2

f und g sind im Punkt x_0 stetig, also gilt $f(x) \to f(x_0)$ und $g(x) \to g(x_0)$. Außerdem gilt, dass $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

$= f(x_0) + g(x_0)$.

Nr. 3

Einzige kritische Stelle bei $x_0 = 0$. Für $\frac{1}{n+1} = x_n$ konvergiert x_n gegen 0, aber $y_n = f(x_n) = 1$ konvergiert nicht gegen $f(0) = -1$.

Nr. 4

a) $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ (für $n \neq 0$) $= 0$ und 0 für $n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$

c) $\lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} -n-1 = -\infty$

d) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} =$ nicht definiert, da Grenzwertverhalten abhängig davon, wie genau x gegen 0 läuft (von oben-> unendlich, von unten -> - unendlich).

e) $\lim_{n\to\infty} f(f(n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \Rightarrow \infty$

f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}} = \sqrt{0} = 0$, da $\sqrt{\cdot}$ stetig.

Nr. 5

Zwischenwertsatz (RW, Satz 6.4)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < y < f(b)$. Dann gibt es ein $x \in (a,b)$ mit $f(x) = y$.

Die Gleichung kann umgeformt werden, sodass

$x^4 = x + 1 \iff x^4 - x - 1 = 0$. Man betrachtet nur die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - x - 1$ und untersucht, ob diese eine ~~reelle Lösung~~ Nullstelle besitzt. ~~[illegible]~~

- f ist stetig
- $f(0) = 0^4 - 0 - 1 = -1$
- $f(2) = 2^4 - 2 - 1 = 13$
- Zwischenwertsatz: die Fkt. nimmt auch den Zwischenwert 0 an, besitzt also eine Nullstelle und die Gleichung hat mind. eine Lösung.