Blatt 5 Notizen

RW, Satz 5.9. (a_n) und (b_n) Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$

1.) $a_n + b_n \to a+b$

2.) $a_n - b_n \to a-b$

3.) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

4.) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, wenn $b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$

Nr. 1

a) $$a_n = \frac{n^3 + 3n + 3}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{\cancel{n^4}\left(\overset{\to 0}{\frac{1}{n}} + \overset{\to 0}{\frac{3}{n^3}} + \overset{\to 0}{\frac{3}{n^4}}\right)}{\cancel{n^4}\left(\underset{\to 1}{1} + \underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{n^4}}\right)} \to \frac{0}{1} = 0$$

b) $$b_n = \frac{1}{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \to 0$$

c) $$c_n = \frac{n^3 + 3n + 3}{n^4 + n^2 + 1} + \frac{1}{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \xrightarrow{\text{Regel 1.)}} 0 + 0 = 0$$

d) $$d_n = a_n - 10 \to -10$$

e) $$e_n = \overset{\to 0}{a_n} \cdot \overset{\to -10}{(a_n - 10)} \to 0 \cdot (-10) = 0$$

f) 4.) nicht anwendbar, da $a_n \to 0$.

$$x_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)}{n+1} \cdot \frac{n^4 + n^2 + 1}{n^3 + 3n + 3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \frac{n^4 + n^2 + 1}{n^4 + 3n^2 + 3n + n^3 + 3n + 3}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \frac{\cancel{n^4}\left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right)}{\cancel{n^4}\left(1 + \frac{3}{n^2} + \frac{6}{n^3} + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^4}\right)}$$, nicht konvergent,

da $\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ oszilliert und Bruch gegen 1 konvergiert

Nr. 2

RW, Def. 5.12 Reihe:

Sei (a_n) eine Folge. Dann heißt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

die zu (a_n) gehörige Reihe, geschrieben in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Ihre Glieder bezeichnet man als Partialsummen.

RW, Def 5.13

Eine Reihe heißt konvergent, wenn die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. (...)

Satz 5.12: Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Rightarrow (a_n)$ Nullfolge.

a) $s_n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Leftrightarrow s_n - q s_n = 1 - q^{n+1} \; (\mathrm{I})$

und $|q| < 1$.

$$s_n = (1 + q + q^2 + \dots + q^n) \quad \mathrm{II}$$

$$q \cdot s_n = (q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}) \quad \mathrm{III}$$

$$\Rightarrow \quad s_n - q \cdot s_n = 1 + (q-q) + (q^2 - q^2) + \dots + (q^n - q^n) + q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad s_n(1-q) = 1 + q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad s_n = \frac{1+q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow{5)} \frac{1}{1-q}$$

Nr. 3

a) $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i$: nicht konvergent, da $s_0 = 1$; $s_1 = s_0 + -1 = 0$; $s_2 = s_1 + (-1)^2$
$= 1$; $s_3 = s_2 - 1 = 0$ ...

b) $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, mit $0 \leq a_i \leq q^i$ und $|q| < 1$. $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ konvergiert, damit
auch $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

c) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$ konvergiert gegen $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ (siehe Nr. 2) $= 2$.

d) Konvergiert nicht, da $\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt und mon. steigend.

Nr. 4

a) Aussage wahr (∞ oder "$\infty + 1$" ist immer noch ∞)

c) Aussage falsch, da z. B. $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = q \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{q}{1-q}$

$\neq \frac{1}{1-q}$

Vorsicht!

b) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

$\sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$

Nr. 5

Die harmonische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ ist nicht konvergent.

Für $a_n = \frac{1}{n+1}$ und $b_n = -\frac{1}{n+1}$ sind die entsprechenden Reihen ebenso nicht konvergent, $\sum_{i=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \left(-\frac{1}{n+1}\right)\right)$
$= \sum_{i=0}^{\infty} 0$ allerdings schon.