Blatt 4 Notizen

N. 1

RW, Def 5.4 Konvergenz & Grenzwert

Eine Folge (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $\forall \varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so dass $\forall n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

Man schreibt dann

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a$$

Die Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert a.

Bedingungen:

- (a_n) konvergiert $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt
- (a_n) mon. steigend. $(a_n) \to a \Leftrightarrow (a_n)$ beschränkt
- (a_n) " fallend. $(a_n) \to a \Leftrightarrow$ " "

a) $a_n = n$: nicht konvergent

b) $b_n = (-1)^n \cdot n$: nicht konvergent

c) $c_n = \frac{1}{n^2+1}$: mon. fallend und beschränkt $\Rightarrow$ konvergent, $c_n \to 0$

d) $d_n = 2 + \frac{1}{n+1}$: mon fallend und beschränkt $\Rightarrow$ konvergent, $d_n \to 2$

e) $e_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$: $e_n \to 0$

Nr. 2

a) $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

b) $b_n^1 = n$; $b_n^2 = \frac{n^2+1}{n}$ ...

c) $c_n = (-1)^n$

d) $d_n = b_n^1 = n$

Nr. 3

Konvergenz der arithmetischen Folge $a_n = a_0 + c \cdot n$:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \begin{cases} a_0 & \text{für } c = 0 \\ \infty & \text{für } c > 0 \\ -\infty & \text{für } c < 0 \end{cases}$$

Die arithmetische Folge ist nur dann konvergent, wenn sie eine konstante Folge ist, also $c = 0$ gilt.

Konvergenz der geometrischen Folge $b_n = b_0 \cdot c^n$

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \begin{cases} \text{divergent} & \text{für } c \leq -1 \text{ und } b_0 \neq 0 \\ 0 & \text{für } |c| < 1 \ \underline{\text{oder}} \ b_0 = 0 \\ b_0 & \text{für } c = 1 \\ \infty & \text{für } c > 1 \text{ und } b_0 > 0 \\ -\infty & \text{für } c > 1 \text{ und } b_0 < 0 \end{cases}$$

Nr. 4

a) Falsch. $a_n = -n$ ist streng monoton fallend und nicht beschränkt

b) Falsch. $b_n = (-1)^n$ ist beschränkt, aber nicht monoton

c) Falsch. $c_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$ konvergiert (gegen 0), ist aber nicht monoton.