Blatt 3 Notizen

Nr. 1

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto |x| := \begin{cases} x, & x \text{ nichtnegativ} \\ -x, & x \text{ negativ} \end{cases}$

(i) injektiv?
Existiert ein Funktionswert $f(x)$, der durch zwei verschiedene x_1 und x_2 aus dem Definitionsbereich (ganz $\mathbb{R}$) erzeugt werden kann? Ja, z.B. $f(2) = f(-2) = |2| = |-2| = 2$.
Damit ist die Funktion nicht injektiv.

(ii) surjektiv?
Kann jedes Element des Wertebereichs bei dieser Vorschrift durch Elemente des Definitionsbereichs gebildet werden? Nein. Der Wertebereich umfasst ganz $\mathbb{R}$, negative Werte können aber nicht gebildet werden.

b) $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}: x \mapsto |x|$

Kann durch verschiedene Elemente das gleiche Funktionselement gebildet werden? Nein, f ist damit injektiv, aber nicht surjektiv (Grund wie in a)) und damit auch nicht bijektiv.

c) $f: [0, \infty) \to [0, \infty): x \mapsto |x|$

injektiv? Ja, s. b)
surjektiv? Ja, die Funktionsvorschrift sorgt für nur ~~pos~~ nichtnegative Funktionswerte, was mit dem Wertebereich übereinstimmt. Bijektiv.

d) $f: [0, \infty) \to [0, \infty): x \mapsto \sqrt{x}$

~~[illegible]~~
~~[illegible]~~ injektiv und surjektiv $\to$ bijektiv

e) $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{x}$:

f): $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \cancel{\quad} x \mapsto 2x+3$

injektiv: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1+3 = 2x_2+3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Injektiv.

surjektiv: $f(x) = 2x+3 = y. \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y-3)$. $f(\frac{1}{2}(y-3)) = 2((y-3)\cdot\frac{1}{2}) = y$

$\Rightarrow$ surjektiv, also auch bijektiv

Nr. 2

RW, Def 5.1: Folge

Eine Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt Folge, geschrieben als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a_n = f(n)$. Die Elemente der Folge, a_n, heißen Folgenglieder.

RW, Def 5.2: Arithmetische Folge

Existiert für eine Folge (a_n) ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} - a_n = c$, so bezeichnet man (a_n) als arithmetische Folge.

RW, Def 5.3: geometrische Folge:

Existiert für eine Folge (a_n) ein $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = c$, so bezeichnet man a_n als geometrische Folge.

a) $a_n = n$, $a_{n+1} = n+1$. Arithmetische Folge, da $a_{n+1} - a_n = n+1-n = 1 = c$.

b) $b_n = 2^n$, $b_{n+1} = 2^{n+1}$. Geometrische Folge, da $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 = c$

c) $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$, $c_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$. Geometrisch, da $\frac{(\frac{1}{2})^{n+3}}{(\frac{1}{2})^{n+2}} = \frac{1}{2} = c$

d) $d_n = \exp(n)$, $d_{n+1} = \exp(n+1)$. Geometrisch, da $\frac{\exp(n+1)}{\exp(n)} = \exp(1) = e = c$

e) $x_0 = 10$; $x_1 = 2\cdot x_0 = 20$; $x_2 = 2\cdot(2\cdot x_0)$; $x_3 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot x_0)) = 2^3 x_0$

$\Rightarrow x_n = 2^n x_0$.

Geometrisch, da $\frac{2^{n+1} x_0}{2^n x_0} = 2 = c$.

1) Weder geometrisch noch arithmetisch. Das nächste Folgenglied ergibt sich aus der Summe der letzten beiden Glieder.

~~RKS~~

Nr. 3 RW, Def 5.6: Beschränktheit:

Eine Folge (a_n) heißt

- nach unten beschränkt, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq c$ gilt
- nach oben beschränkt, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq c$ gilt.
- beschränkt, wenn für ~~alle~~ ein $c \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| \leq c$

a) $a_n = (-1)^n$:

nach unten beschränkt mit $c = -1$
nach oben beschränkt mit $c = 1$.

b) $b_n = \ln(n+1)$

nach unten beschränkt mit $c = 0$
nicht nach oben beschränkt
unbeschränkt

c) $c_n = 1 - \exp(-n)$

nach unten beschränkt $c = 0$
nach oben beschränkt, $c = 1$
beschränkt, $c = 1$

Nr. 4

RW, Def 5.5 Monotonie:

Eine Folge (a_n) heißt monoton steigend, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_{n+1} \geq a_n$. Gilt $a_{n+1} > a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, heißt die Folge streng monoton steigend. Sie heißt monoton fallend, wenn die Ungleichheitszeichen umgekehrt gelten.

a) $a_n = n$: str. mon. steigend und unbeschränkt

b) $b_n = (-1)^n n$. nicht monoton und unbeschränkt

c) $c_n = \frac{1}{n^2+1}$. str. mon. fallend, obere Schranke: $1 = c_1$, untere Schranke: 0 => beschränkt.

d) $d_n = 2 + \frac{1}{n+1}$. str. mon. fallend, OS: 3; US: 2 => beschränkt.

e) $e_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}$. nicht monoton. OS: 1; US: $-\frac{1}{2}$ => beschränkt

f) OS: 1; US: 0; str. mon. fallend, beschränkt.

Nr. 5

a) Für jedes beliebig kleine ε existiert ein Index n_0, ab dem alle Glieder der Folge in der ε-Umgebung des Grenzwertes 1 liegen.

b) (i) z.B. für die konstante Folge $a_n = 0{,}5 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) z.B. für die alternierende Folge $(-1)^n = \{a_n\}$

(iii) z.B. für die Folge $a_n = 2 + \frac{1}{n+1}$