Blatt 2

Mengen:

Vereinigung: $A \cup B$ = Menge aller Elemente, die in A <u>oder</u> in B sind

Schnitt: $A \cap B$ = Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B liegen

Teilmenge: $A \subseteq B$: jedes Element von A liegt auch in B, außerdem dürfen die Mengen "gleich" sein, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

echte Teilmenge: $A \subset B$: jedes Element von A liegt auch in B, aber B enthält mindestens ein weiteres Element.

Nr. 1

a) $A \cup C = \{1,2,3\} \cup \{2,4\} = \{1,2,3,4\}$

b) $A \cap C = \{1,2,3\} \cap \{2,4\} = \{x \in \{1,2,3\}$ und $x \in \{2,4\}\}$

$= \{2\}$

c) $A \cap B = \{1,2,3\} \cap \{3,1,2\} = \{1,2,3\} = \{3,1,2\}$

d) $D \cap (A \cup C) = D \cap (\{1,2,3,4\}) = \{1,2,3,4,5,6\} \cap \{1,2,3,4\}$

$= \{1,2,3,4\}$

e) $A \times C = \{1,2,3\} \times \{2,4\} = \{(1,2); (1,4); (2,2); (2,4); (3,2); (3,4)\}$

ii)

a) $A \subseteq B$: A ist eine ~~...~~ Teilmenge von B, also sind alle in A zu findenden Elemente auch in B enthalten, also $\forall x \in A: x \in B$. Für die hier gegebenen Mengen A und B gilt das.

b) $B \subseteq A$: Wie a).

c) $A = B$: A und B sind gleiche Mengen, enthalten also jeweils die gleichen Elemente. Es gilt also sowohl $A \subseteq B$ (s. a)), als auch $B \subseteq A$.

d) $B \cap C \subseteq C$: Der Schnitt von B und C soll eine Teilmenge von C sein. Alle Elemente von $B \cap C$ sollen also in C liegen. $B \cap C$ ist aber per Definition sicher eine Teilmenge von C.

e) $B \cap C \supseteq C$ $B \cap C$ soll Obermenge von C sein, also alle Elemente von C enthalten. Da B aber die 4 nicht ~~...~~enthält, gilt hier die Aussage nicht.

f) $C \supset D$ C soll eine <u>echte</u> Obermengen von D sein, also alle Elemente von D enthalten, aber nicht gleich D sein. C enthält aber nur zwei Elemente aus D, damit ist die Aussage hier nicht gültig.

g) $C \neq B$ C und B enthalten nicht die exakt gleichen Elemente. Die Aussage stimmt für die hier gegebenen Mengen.

Nr. 2

a) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (positive ganze Zahlen) natürliche Zahlen

oder

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ (nichtnegative Zahlen)

Laut DIN-Norm 5473 wird $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ gesetzt.

b) $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ganze Zahlen

c) $\mathbb{Q}$: rationale Zahl. ~~Verh~~ Verhältnis zweier ganzer Zahlen

d) $\mathbb{R}$: reelle Zahlen. Menge der rationalen Zahlen, mit der Menge der irrationalen Zahlen (Zahlen, die nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen dargestellt werden können, z.B. $\sqrt{2}$).

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Nr. 3

RW, Definition 4.3:

Sei $f: X \to Y$ eine Funktion und $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$. Dann heißt die Menge $f(U) = \{y \in Y \mid \exists x \in U: y = f(x)\}$ Bildmenge von U.

Die Menge $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ heißt Urbildmenge von V.

1.) $f([0,1]) = \{f(x) \mid x \in [0,1]\} = \{x \mid x \in [0,1]\} = [0,1]$

2.) $f^{-1}([0,1]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [0,1]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [0,1]\} = [0,1]$

3.) $g^{-1}([0,1]) = \{x \in \mathbb{N} \mid g(x) \in [0,1]\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in [0,1]\} = \{0,1\}$

4.) $h^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x+y=0\} = \{(0,0)\}$

5.) $h^{-1}(h(\{(1,2)\})) = h^{-1}(\{h(x) \mid x \in \{(1,2)\}\}) = h^{-1}(\{3\})$

$= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x+y=3\} = \{(0,3); (1,2); (2,1); (3,0)\}$

Nr. 4

RW Def. 4.4:

Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Funktionen mit beliebigen, nichtleeren Mengen ~~A~~ X, Y, Z. Dann heißt die Funktion

$$g \circ f : X \to Z \quad \text{mit} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \; \forall x \in X$$

Verkettung von f und g.

Bedingung: Definitionsbereich der "linken" Funktion muss dem Wertebereich der "rechten" Funktion entsprechen

1.) $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : \quad x+1 \mapsto (x+1)-1 = x$, hier dann

$$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$x \mapsto x$$

2.) $f \circ g$: nicht möglich, da Definitionsbereich von f ungleich dem Wertebereich von g.

3.) $h \circ i : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \quad x \mapsto (x, x+1) \mapsto x+1$, also

$h \circ i : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \quad x \mapsto (x+1)$

4.) $i \circ h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \quad (x,y) \mapsto y \mapsto (y, y+1)$, also

$$i \circ h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$(x,y) \mapsto (y, y+1)$$