Blatt 13 Notizen

Nr. 1

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_1x_5 \\ x_1 \\ \exp(x_3+x_4) + 2x_5 \\ \exp(x_3+x_4) \\ -(x_1^2 - 2x_3) \end{pmatrix}$$

Nr. 2

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{pmatrix} \rightarrow \quad Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

hier:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \\ 1 + \frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}\sqrt{(x_2-x_3)}; & 2+\frac{1}{2}(x_1x_2-x_1x_3)^{-\frac{1}{2}}x_1; & -\frac{1}{x_3} - \frac{1}{2}x_1(x_1x_2-x_1x_3)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Nr 3

Notwendige Bedingung: $\nabla f(x) \overset{!}{=} 0$

Hinreichend: Hesse-Matrix nicht indefinit.

Definitheit: Eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist positiv definit, wenn ihre Hauptminoren $\det(a_{11})$ und $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ positiv sind. A ist positiv-semidefinit, wenn ihre Hauptminoren nichtnegativ sind (also ≥ 0).

Definitheit und Extrema:

Hesse-Matrix	pos. definit:	Minimum
	pos. semidefinit:	keine allg. Aussage, ~~enthält lok. Minimum~~
	indefinit:	Sattelpunkt
	neg. semidefinit:	keine allg. Aussage
	neg. definit:	Maximum

a) $[0, \infty)$

b) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 \ln(1+x_2^2) \\ x_1^4 \dfrac{2x_2}{1+x_2^2} \end{pmatrix}$

c) $Hf(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} \overset{\text{hier}}{=} \begin{pmatrix} 12x_1^2 \ln(1+x_2^2) & 4x_1^3 \dfrac{2x_2}{1+x_2^2} \\ 4x_1^3 \dfrac{2x_2}{1+x_2^2} & x_1^4 \left(\dfrac{2 + 2x_2 - 4x_2^2}{(1+x_2^2)^2} \right) \end{pmatrix}$

d) $\nabla f(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$.

$H f(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ pos. semidefinit: $Hf(0)_{11} = 0$ und $\det Hf(0) = 0$.

e) Nach a: Für alle Stellen x_1 und x_2 ist $f(x_1, x_2) \geq f(0, 0)$, der kleinste Wert wird für $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$ erreicht.

Nr. 4

a) f kann alle Werte größer oder gleich 1 annehmen.

b)
$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \exp(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ 2x_2 \exp(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ 2x_3 \exp(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \end{pmatrix}$$

c)
$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 2\exp(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(1+2x_1^2); & 4x_1x_2\exp(x_1^2+x_2^2+x_3^2) & 4x_1x_3\exp(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \\ 4x_1x_2\exp(x_1^2+x_2^2+x_3^2) & 2\exp(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(1+2x_2^2) & 4x_2x_3\exp(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \\ 4x_3x_1\exp(x_1^2+x_2^2+x_3^2) & 4x_3x_1\exp(x_1^2+x_2^2+x_3^2) & 2\exp(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(1+2x_3^2) \end{pmatrix}$$

d) und e)

$$\nabla f(x) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{pos. definit} \Rightarrow (0,0,0) \mathrel{\hat{=}} \text{Minimum}$$