Blatt ~~11~~ 12 Notizen

Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme $Ax = b$, mit $A$ Koeffizientenmatrix, $A|b$ erweiterte Koeffizientenmatrix und $n$ Anzahl Unbekannter.

- Eindeutige Lösung: $rg(A) = rg(A|b) = n$

- unendlich viele Lösungen: $rg(A) = rg(A|b) < n$

- keine Lösung $rg(A) \neq rg(A|b)$

Nr. 1

$rg(A) = 2$ ; $rg(A|b) = 3$ $\Rightarrow$ keine Lösung

Nr. 2

a) $$\begin{pmatrix} x & 1 & 3 \\ 0 & y & 0 \\ -7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & (x+5) \\ 0 & 2y \\ -14 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $\det(A) = 2xy + 21y$

Hilfe: Regel von Sarrus:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} x & 1 & 3 & x & 1 \\ 0 & y & 0 & 0 & y \\ -7 & 1 & 2 & -7 & 1 \end{array}\right) = xy2 + 1\cdot 0(-7) + 3\cdot 0\cdot 1 - (-7\cdot y\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot x + 2\cdot 0\cdot 1)$$

$$= 2xy + 21y$$

c) $\det(C) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$

d) $C^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

hier: $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 4 - 3 \cdot 1} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

e) $\det(C^{-1}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} - \left(-\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$

f) $rg(B) = 2$

Nr. 3

Gradient:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ \exp(x_3) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3 \partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(x_3) \end{pmatrix}$$

Nr. 4 $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2$

Isolinie: Kombinationen von $x_1$ und $x_2$, für die

$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c$.

Hier: $x_1 + 2x_2 = c \iff x_2 = \frac{c - x_1}{2}$

$\rightarrow$ Geraden mit Steigung $-\frac{1}{2}$