Blatt 11 Notizen

Nr. 1

a) Transponierte Matrix: Element a_{ij} wird zu a_{ji} in transp. Matrix.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\langle a, b \rangle = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 4$

c) $\|a\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

Nr. 2

a) Orthogonal (Vektoren stehen senkrecht aufeinander) wenn $\langle u, v \rangle = 0$:

$\langle u, v \rangle = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = -1 + 4 = 3 \; (\neq 0)$

$\Rightarrow$ u und v nicht orthogonal.

b) Es muss gelten, dass $\langle u, w \rangle = 0 = \langle v, w \rangle$. Das gilt z.B. für $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nr. 4

a)

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \qquad \mathrm{I} \\ 2x_1 \phantom{{}- x_2} + x_3 &= 7 \qquad \mathrm{II} \end{aligned}$$

$rg(A) = 2$; $rg(A|d) = 2$, aber drei Unbekannte => GS nicht eindeutig lösbar, $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig.

aus II: $2x_1 = 7 - x_3$

$x_1 = \frac{1}{2}(7 - x_3)$ (-> in I einsetzen)

I': $\frac{1}{2}(7 - x_3) - x_2 + x_3 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{7}{2} - x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1$

$\Leftrightarrow x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_3$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_3 \in \mathbb{R}, x_2 = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_3\right); x_1 = \frac{1}{2}(7 - x_3) \right\}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ Überbestimmt, aber lösbar

$2x_1 + 3x_2 = -2$ I

$x_1 + x_2 = 0$ II

$x_1 + \; = 2$ III

aus III: $x_1 = 2$ -> in II

II': $2 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$

(Einsetzen in I: passt).

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 = 2 ; x_2 = -2 \right\}$$

c) ~~rg(C) = 1, rg(C|c) = 1, drei Unbekannte: mehrere Lösungen.~~

~~Lösbar für $x_1 = 8, x_2 = x_3 = 0$ oder $x_2 = 4$ und $x_1 = x_3 = 0$,~~

~~Allgemein~~

$$\cancel{\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_3 = \frac{8 - x_1 - 2x_2}{3} ; x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \right\}}$$

Nr. 5

Die Aussage ist falsch. Mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

gilt:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 0,$$

$$\langle v_2, v_3 \rangle = (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 0,$$

aber $\langle v_1, v_3 \rangle = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 10 \neq 0$

(Orthogonalität kein transitives Konzept)

Nr. 4

c) $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 = 0, \, x_2 = -2, \, x_3 = 4 \right\}$

Nr. 3

a) $\underline{v}'\underline{v}x = y \iff (v_1^2 + v_2^2)x = y$ für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\iff x = \frac{y}{v_1^2 + v_2^2}$$

$\Rightarrow$ immer lösbar, da v_1 und v_2 ungleich 0.

b) $\underline{v}\underline{v}'\underline{x} = \underline{y} \iff \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 \\ v_2 v_1 & v_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1^2 x_1 + v_1 v_2 x_2 &= y_1 \quad \mathrm{I} \\ v_2 v_1 x_1 + v_2^2 x_2 &= y_2 \quad \mathrm{II} \end{aligned}$$

$$\mathrm{I} \iff x_1 + \frac{v_2}{v_1} x_2 = \frac{y_1}{v_1^2}$$

$$\mathrm{II} \iff x_1 + \frac{v_2}{v_1} x_2 = \frac{y_2}{v_1 v_2}$$

Linke Seiten in beiden Gleichungen gleich $\Rightarrow$ Nur eine Lösung, wenn auch die rechten Seiten gleich sind

$$\Rightarrow x_1 = \frac{y_1}{v_1^2} - \frac{v_2}{v_1} x_2$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 = \frac{y_1}{v_1^2} - \frac{v_2}{v_1} x_2 \right\}$$