Aufgabe 1

Berechnen Sie für die Vektoren und Matrizen

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

die Ergebnisse von

a) Ab sowie $b^T B$

$$Ab = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$b^T B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$$

b) AB sowie BA

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $C(BA)$ sowie $(CB)A$

$$C(BA) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 & 10 \\ 15 & -5 & 10 \\ 30 & -10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(CB)A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 & 10 \\ 15 & -5 & 10 \\ 30 & -10 & 20 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix zur identischen Abbildung von $\mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{R}^4$

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 : x \mapsto x.$$

Die Spalten der Abbildungsmatrix sind die Bilder der kanonischen Basisvektoren unter f, d.h. in der i-ten Spalte steht $f(e_i) = e_i$, wobei e_i der i-te kanonische Basisvektor ist. Also ist die Abbildungsmatrix gegeben durch:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Sind die Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig? (Begründung!)

Die Vektoren sind linear unabhğigig: Aus $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt sofort $\lambda_1 = 0$ (das steht genau in der ersten Zeile der obigen Gleichung), $\lambda_2 = 0$ (das steht genau in der zweiten Zeile) und $\lambda_3 = 0$ (das steht genau in der dritten Zeile).

b) Sind die Vektoren v_1, v_2 und v_5 linear unabhängig? (Begründung!)

Man sieht leicht, dass $v_5 = 4v_1 + 4v_2$ gilt (wenn man das nicht sieht, dann muss man den Ansatz $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ machen und eine nichttriviale Lösung dieses Gleichungssystems finden.) . Also existiert mit $4v_1 + 4v_2 + (-1)v_5$ eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors.

c) Sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 und v_4 linear unabhängig? (Begründung!)

Da v_1 bis v_3 die kanonischen Basisvektoren sind, lässt sich jeder Vektor ganz einfach durch eine Linearkombination dieser Basisvektoren darstellen. Hier : $v_4 = 2 \cdot v_1 + 5 \cdot v_2 + (-1)v_3$ Damit sind die vier Vektoren linear abhängig (nichttriviale Linearkombination des Nullvektors ist z.B. $2v_1 + 5v_2 + (-1)v_3 + (-1)v_4$)

d) Sind die Vektoren v_3, v_4 und v_5 linear unabhängig? (Begründung!)

Aus $\lambda_1 v_3 + \lambda_2 v_4 + \lambda_3 v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt: $2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$ also $\lambda_2 = -2\lambda_3$ (erste Zeile) und

$5\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$ also $\lambda_2 = -\frac{4}{5}\lambda_3$ (zweite Zeile) was gleichzeitig nur gelten kann, wenn $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ gilt. Aus der dritten Zeile folgt schließlich noch $\lambda_1 = 0$, so dass alle Koeffizienten Null sind, d.h. es gibt nur die triviale Linearkombination des Nullvektors.

Aufgabe 4

Ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + y + 1$$

eine lineare Abbildung? (Begründung!)

Die Abbildung ist nicht linear. Für z.B. $\lambda = 2$ gilt :

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \lambda x + \lambda y + 1 \neq \lambda f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \lambda x + \lambda y + \lambda$$