Aufgabe 1

Sind die folgenden Aussagen wahr?

a) Jede Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt ein globales Maximum.

b) Jede Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt ein lokales Maximum.

c) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt ein globales Maximum.

d) Jede Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt ein globales Maximum.

e) Ein globales Maximum ist immer auch ein lokales Maximum.

f) Jede Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt ein lokales Maximum.

g) Ein lokales Maximum ist immer auch ein globales Maximum.

h) Besitzt eine Funktion ein globales Maximum, so ist dieses eindeutig bestimmt.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf lokale und globale Maxima bzw. Minima.

a) $f(x) = e^{x^2}$

b) $f(x) = \sin(x)$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = x^4$

Aufgabe 3

Man untersuche mit Hilfe der Differentialrechnung die folgenden Funktionen auf Monotonie:

a) $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$

b) $g : [20, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \cdot \exp(-x)$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Gewinnfunktion eines Unternehmens bei vollständiger Konkurrenz streng konkav ist.
Sei dazu x ($x > 0$) die Menge des Gutes, welches das Unternehmen herstellt, $p > 0$ der feste Preis (aufgrund der Annahme der vollständigen Konkurrenz muss das Unternehmen den Preis als gegeben betrachten und kann ihn nicht selbst beeinflussen) und

$$c(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$$

die Kostenfunktion, wobei $\alpha, \beta, \gamma > 0$ (also eine quadratische Kostenfunktion).
Hinweis:

Die Gewinnfunktion ergibt sich als Differenz von Erlös (Preis $\cdot$ Menge) und Kosten.